diss Berlin 1964

Helga Heil - geb: Lehilo

1964

DIE HYDRODYNAMISCHEN GLEICHUNGEN ZWEIATOMIGER, ANREGBARER UND DISSOZIIERENDER GASE ALS NÄHERUNGSLÖSUNG DER ZUGEHÖRIGEN BOLTZMANN - GLEICHUNGEN

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

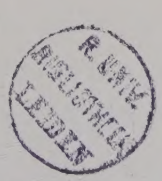
Helga Heil geb. Schilo

aus

B e r l i n

aus dem Institut für Theoretische Physik

der Freien Universität Berlin



1. Referent : Prof. Dr. G. LUDWIG

2. Referent : Prof. Dr. M. PÄSLER

Tag der mündlichen Prüfung : 22. Februar 1963

Tag der Promotion : 29. Juli 1964

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Einleitung		1
§ I	Die BOLTZMANNschen Stoßgleichungen	4
§ II	Die Erhaltungs- und Momentengleichungen der Stoßgleichungen	8
§ III	Ein spezieller Lösungsansatz	16
§ IV	Die Gleichungen der "hydrodynamischen" Momente	36
§ V	Die Stoßintegrale	42
§ VI	Die "NAVIER-STOKES" Gleichungen eines dissoziierenden Gases mit inneren Freiheitsgraden	51
§ VII	Zusammenfassung	71
§ VIII	Ausblick	74
Anhang:	Berechnung der Stoßintegrale	75
a)	Berechnung von $I_{11}(\psi)$ und $I_{22}(\psi)$	76
b)	Berechnung von $I_{12}(\psi)$	88
c)	Berechnung von $I_{111}^{12'}(\psi)$	96
d)	Berechnung von $I_{112}^{22'}(\psi)$	119
e)	Zusammenfassung	137
Literaturverzeichnis		

Einleitung

Sucht man nach Gesetzen, die das makroskopische Verhalten von Gasströmungen beschreiben, so stehen einem grundsätzlich zwei Wege zur Verfügung. Die phänomenologische Methode geht vom experimentellen Befund aus und entnimmt ihm die Zustandsvariablen, die die Strömung vollständig beschreiben. Die einfachsten dazugehörigen Gesetze sind die, welche jede Vektorgröße (Skalar- oder Tensorgröße) als proportional allen möglichen aus den Zustandsvariablen herstellbaren Vektorgrößen (bzw. Skalar- oder Tensorgrößen) ansetzt. Die zugehörigen Proportionalitätsfaktoren werden wiederum dem Experiment entnommen. Hinzu kommen der Massenerhaltungs-, der Impuls- und der Energiesatz. Die einfachsten Gleichungen, die man auf diese Weise erhalten kann, sind die EULERschen und die NAVIER-STOKESschen Gleichungen einatomiger Gase.

Andererseits muß man dieselben Gleichungen auch herleiten können, wenn man die Gasströmung nicht wie in der phänomenologischen Theorie als die Strömung eines kontinuierlichen Mediums ansieht, sondern von ihrem mikroskopischen Aufbau aus Molekülen ausgeht. Die sonst experimentell zu bestimmenden Konstanten der Strömungsgesetze müssen sich dann aus den Eigenschaften der einzelnen Moleküle berechnen lassen.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß ein großer Bereich von Erscheinungen in Gasen von mittlerer Dichte durch die von BOLTZMANN angegebene Integrodifferential-Gleichung für die Dichteverteilungsfunktion beschreibbar ist. In ihr treten die Eigenschaften des zu behandelnden Gases nur in Form der Zweierstoßwirkungsquerschnitte der Moleküle auf. Die BOLTZMANN-Gleichung beschreibt jedoch einen wesentlich größeren Erscheinungsbereich als die makroskopischen hydrodynamischen Gleichungen. Sucht man solche hydrodynamischen Gleichungen, so muß man die BOLTZMANN-Gleichung unter gewissen, dem Experiment abgesehenen Einschränkungen, lösen. Für einatomige Gase ist dies nach zwei verschiedenen Methoden von CHAPMAN-ENSHOG (1) und GRAD (2) durchgeführt worden. Tatsächlich erhält man nach beiden Ver-

fahren die NAVIER-STOKES-Gleichungen bzw. kompliziertere Gleichungen, die eine höhere Näherung darstellen, jedoch ebenfalls noch zum Typ der hydrodynamischen Gleichungen gehören.

Die Methode von CHAPMAN-ENSHOG wurde von WANG CHANG und UHLENBECK (3) benutzt, um eine erweiterte BOLTZMANN-Gleichung für anregbare Moleküle zu lösen. Das gleiche Verfahren verwandte M. HEIL (4,5) zur Lösung einer BOLTZMANN-Gleichung für zweiatomige, reagierende Gase. Er mußte sich dabei jedoch auf zwei Grenzfälle nämlich chemisches Gleichgewicht bzw. fast eingefrorenes chemisches Gleichgewicht beschränken. Hinsichtlich der inneren Freiheitsgrade der Moleküle wurde in erster Näherung Gleichgewicht von innerer und Translationstemperatur angesetzt, d.h. der Austausch von inerer und Translationsenergie soll leicht sein.

Das Verfahren von GRAD wurde auf ein nichtreagierendes Gemisch von Molekülen von KOLODNER (6) angewandt. H. HEIL (7) behandelte nach einem erweiterten GRAD-Verfahren ein Gas anregbarer Moleküle. Dabei findet man hydrodynamische Gleichungen, die in einfachster Näherung die NAVIER-STOKES-Gleichungen für anregbare Moleküle darstellen. Diese Lösung ist identisch der von WANG CHANG und UHLENBECK (3) nach der Methode von CHAPMAN gefundenen. Darüber hinaus kann man leicht eine höhere Näherung angeben, die jedoch bereits so kompliziert ist, daß eine Anwendung außer auf sehr spezielle Strömungsprobleme an den mathematischen Schwierigkeiten scheitern wird.

In der vorliegenden Arbeit werden die von M. HEIL (4,5) angegebenen BOLTZMANNschen Stoßgleichungen für zweiatomige, anregbare und dissoziierende Gase nach einer verallgemeinerten GRAD-Methode behandelt. Dabei muß man weder chemisches Gleichgewicht noch Gleichgewicht zwischen den inneren und Translationsfreiheitsgraden annehmen, um die Lösung einigermaßen übersichtlich zu halten. Die Berechnung der auftretenden Proportionalitätsfaktoren ist prinzipiell leicht durchführbar. Bei der praktischen Durchführung ergibtsich allerdings ein beträchtlicher Rechenaufwand. Um darüber hinaus die numerische

Auswertung der im Anhang gegebenen Stoßintegrale in einemtragbaren Rahmen zu halten (auch bei Verwendung elektronischer Rechenanlagen), müßten noch zusätzliche, vereinfachende Annahmen bezüglich derWirkungsquerschnitte gemacht werden. Tatsächlich wird z.B. bei den von PETZOLD (8) und GROßMANN (9) berechneten Wirkungsquerschnitten eine Winkelabhängigkeit vernachlässigt.

Leider ist die Unsicherheit der berechneten Wirkungsquerschnitte bis jetzt noch sehr groß. Experimentell direkt gemessene Wirkungsquerschnitte liegen überhaupt nicht vor. Der Vergleich über indirekte Meßmethoden (7), (10), nämlich der Vergleich von experimentellen und berechneten Stoßwellenversuchen, zeigt eine starke Abweichung. Die experimentellen Ergebnisse von BYRON (10) würden zu mindestens 100 fach größeren Wirkungsquerschnitten führen als die theoretischen Berechnungen. Diese Diskrepanz ist bis heute ungeklärt.

Die direkte experimentelle Messung der Strömungskonstanten wie Viskosität **etc.** eines hoch erhitzten Gases ist aber ebenfalls bis heute nicht zuverlässig möglich, obgleich dies für die Technik überschnell fliegender Flugkörper von großem Interesse ist. So besteht die Hoffnung, daß es doch noch gelingt, die Wirkungsquerschnitte hinreichend gut zu messen oder zu berechnen, um dann aus der kinetischen Theorie sowohl die Form der hydrodynamischen Gleichungen als auch die Zahlenwerte der benötigten Strömungskonstanten zu entnehmen.

§ I Die B O L T Z M A N Nschen Stoßgleichungen

Das zu untersuchende Gas bestehe aus Atomen und den dazugehörigen zweiatomigen Molekülen. Es sei einschränkend angenommen, daß die Atome sich im Grundzustand befinden, während die Moleküle Zustände verschiedener innerer Energie ε_i annehmen können. Tatsächlich sind auch die niedersten elektronischen Zustände der Atome bei den Temperaturen, die eine merkliche Dissoziation möglich machen, bereits wesentlich angeregt. Es sollte also besser gesagt werden, daß die Annahme gemacht wird, daß der Zustand der Hüllenelektronen für die Übergangswahrscheinlichkeiten in den Stoßintegralen vernachlässigt wird. Dagegen muß in den hydrodynamischen Grundgleichungen diese Anregung in der spezifischen Energie der Atome berücksichtigt werden. Die BOLTZMANNsche Dichtefunktion der Atome beschreibt also die Anzahl der Atome im Geschwindigkeits- und Ortsintervall, dagegen sei über die inneren Energiezustände bereits integriert. Für den Mechanismus der Dissoziation ist wesentlich der Schwingungs- bzw. Rotationszustand der Moleküle. Daher wird man eine entsprechende Annahme für den elektronischen Anteil der Anregung der Moleküle zumindest modellmäßig machen. Die innere Energie ε_i der Moleküle beschreibt dann jeweils nur den Rotations- und Schwingungszustand oder gar allein den Slhwingungszustand des Moleküls. Die letzte Annahme ist für die folgenden Überlegungen vorläufig unwesentlich, wird jedoch bei der numerischen Auswertung der Stoßintegrale durch Einführung entsprechender Modelle für die Berechnung der Wirkungsquerschnitte immer gemacht werden. (Siehe z.B. (8,9)). Darüber hinaus liegt sie auch dem später gemachten Lösungsansatz zugrunde.

Die Möglichkeit der Ionisation von Atomen und Molekülen wird vernachlässigt. Die ist z.B. bei Sauerstoff und Stickstoff bis zu Temperaturen von ca. 10 000^{o}K wegen der hohen Ionisationsenergien gerechtfertigt. (Siehe z.B. (11,12)).

Die Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten in den Stoßintegralen von dem inneren Anregungszustand der Moleküle sei nur eine solche von der Energie des Zustandes nicht aber von weiteren Quantenzahlen wie z.B. dem Spin. Zumindest sei es möglich, durch Mittelung über die weiteren Quantenzustände solche mittleren Übergangswahrscheinlichkeiten einzuführen. Die BOLTZMANNschen Stoßgleichungen dieses Problems bei Abwesenheit äußerer Felder werden in (4,5) hergeleitet. Hier sei nur das Ergebnis angeführt, das als Ausgangspunkt für die Herleitung hydrodynamischer Gleichungen des Problems dienen soll.

Es werden die BOLTZMANNschen Dichtefunktionen der Atome f_1 und der Moleküle im Zustand ε_i, f_{2i} eingeführt. Die BOLTZMANN-Funktionen seien bezüglich der Geschwindigkeit $\vec{\xi}$ auf die Teilchenzahl pro Kubikzentimeter n notmiert.

$$f_1 = f_1(\vec{\xi}_1, \vec{r}, t) \qquad f_{2i} = f_{2i}(\vec{\xi}_2, \vec{r}, \varepsilon_i, t) \tag{1}$$

wobei $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1 \, d\xi_1 = n_1$ = Zahl der Atome im Kubikzentimeter und

$\sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} f_{2i} \, d\xi_2 = n_2$ = Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter.

Die BOLTZMANNschen Stoßgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{\xi}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} &= \int (f_1' \bar{f}_1' - f_1 \bar{f}_1) \sigma_{11} \, d\vec{\xi}_1 \, d\vec{\xi}_1' \, d\vec{\xi}_1' \\
&+ \sum_{ij} \int (f_1' f_{2j}' - f_1 f_{2i}) \sigma_{12} \, d\vec{\xi}_1' \, d\vec{\xi}_2' \, d\vec{\xi}_2 \\
&+ 3 \sum_j \int (f_1' f_{2j}' - k_1 f_1 \bar{f}_1 \bar{\bar{f}}_1) \sigma_{111}^{12'} \, d\vec{\xi}_1' \, d\vec{\xi}_2' \, d\vec{\xi}_1 \, d\vec{\xi}_1 \\
&+ 2 \sum_{ijk} \int (f_{2j}' \bar{f}_{2k}' - k_1 f_1 \bar{f}_1 f_{2i}) \sigma_{112}^{22'} \, d\vec{\xi}_2' \, d\vec{\xi}_2' \, d\vec{\xi}_1 \, d\vec{\xi}_2 \\
&+ \sum_i \int (k_1 f_1' \bar{f}_1' \bar{\bar{f}}_1' - f_1 f_{2i}) \sigma_{111'}^{12} \, d\vec{\xi}_1' \, d\vec{\xi}_1' \, d\vec{\xi}_1' \, d\vec{\xi}_2
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial f_{2i}}{\partial t} + \vec{\xi}_2 \cdot \frac{\partial f_{2i}}{\partial \vec{r}} = \sum_{jke} \int (f_{2j}' \bar{f}_{2k}' - f_{2i} \bar{f}_{2e}) \sigma_{22} \, d\vec{\xi}_2' d\vec{\bar{\xi}}_2' d\vec{\bar{\xi}}_2$$

$$+ \sum_{j} \int (f_{2j}' f_1' - f_{2i} f_1) \sigma_{21} \, d\vec{\xi}_2' d\vec{\xi}_1' d\vec{\xi}_1$$

$$+ 2 \sum_{je} \int (k_1 f_1' \bar{f}_1' f_{2j}' - f_{2i} \bar{f}_{2e}) \sigma_{112'}^{22} \, d\vec{\xi}_1' d\vec{\bar{\xi}}_1' d\vec{\xi}_2' d\vec{\bar{\xi}}_2 \qquad (3)$$

$$+ \sum_{jk} \int (f_{2j}' \bar{f}_{2k}' - k_1 f_{2i} f_1 \bar{f}_1) \sigma_{112}^{22'} \, d\vec{\xi}_2' d\vec{\bar{\xi}}_2' d\vec{\xi}_1 d\vec{\bar{\xi}}_1$$

$$+ \int (k_1 f_1' \bar{f}_1' \bar{f}_1' - f_{2i} f_1) \sigma_{111'}^{22} \, d\vec{\xi}_1' d\vec{\xi}_1' d\vec{\bar{\xi}}_1' d\vec{\xi}_1$$

Dabei kennzeichnen die Striche bzw. Querstriche an den Funktionen f deren Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten, z.B. $\bar{f}_1' = \bar{f}_1'(\vec{\xi}_1', \vec{r}, t)$. Zwischen den Übergangswahrscheinlichkeiten σ bestehen gewisse Symmetrierelationen. Es gilt:

$$\sigma_{11}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1 / \vec{\xi}_1', \vec{\xi}_1') = \sigma_{11'}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1' / \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1')$$

$$\sigma_{12'}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2\, \epsilon_i / \vec{\xi}_1', \vec{\xi}_2'\, \epsilon_j') = \sigma_{12'}(\vec{\xi}_1', \vec{\xi}_2'\, \epsilon_j' / \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2\, \epsilon_i) \qquad (4)$$

$$\sigma_{12'}^{11'}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1 / \vec{\xi}_1', \vec{\xi}_2'\, \epsilon_j') = k_1\, \sigma_{11'}^{12'}(\vec{\xi}_1', \vec{\xi}_2'\, \epsilon_j' / \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1)$$

$$\sigma_{22'}^{12'}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2\, \epsilon_i / \vec{\xi}_2'\, \epsilon_j', \vec{\xi}_2'\, \epsilon_k') = k_1\, \sigma_{12'}^{22'}(\vec{\xi}_2'\, \epsilon_j', \vec{\xi}_2'\, \epsilon_k' / \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2\, \epsilon_i)$$

mit $k_1 = \left(\frac{2h}{m_1}\right)^3$

h = PLANCKsches Wirkungsquantum

m_1 = Atommasse

Darüber hinaus sind die Übergangswahrscheinlichkeiten invariant gegen Vertauschung gleichartiger Teilchen.

Bei dieser Schreibweise der Stoßgleichungen sind ein Teil der Integrationen noch ausführbar, wenn man den Energiesatz und den Impulssatz benutzt. Man erhält dann die übliche Schreibweise in Wirkungsquerschnitten. Die Symmetrien der Wirkungsquerschnitte folgen aus denen der Übergangswahrscheinlichkeiten (4). Sie sind jedoch komplizierter. Es soll deshalb die Schreibweise (2) und (3) beibehalten werden und die Integration erst bei der expliziten Auswertung gewisser Stoßintegrale durchgeführt werden.

§ II Die Erhaltungs- und Momentengleichungen der Stoßgleichungen

Bevor die zum System (2) , (3) gehörigen Momentengleichungen hergeleitet werden, soll die Vektorschreibweise eingeführt werden, die im Folgenden benutzt wird.

Es sei $\vec{x}$ ein Vektor $\vec{x} = (x_1 , x_2 , x_3)$. Dann werde mit $\vec{x}^n$ ein Tensor n -ter Stufe mit Komponenten

$(\vec{x}^n)_{i_1 \dots i_n} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ bezeichnet. Dagegen bezeichnet x^2 das Skalarprodukt $x^2 = \sum_1^3 x_i^2 = x_i \cdot x_i$.

Für wiederholte Indizes gelte die Summenkonvention.

Ferner sei folgende Multiplikationsregel definiert: Das Produkt zweier Tensoren $A^{(n)} \cdot B^{(m)}$ ist die Summe aller verschiedenen Produkte der Komponenten $A^{(n)}_{i_1 \dots i_n}$ und $B^{(m)}_{j_1 \dots j_m}$, die man durch Permutation der Indizes erhält, z.B. gilt für das Quadrat des Einheitstensors $\vec{\delta}$ mit Komponenten δ_{ij}

$\vec{\delta}^2_{ij\,kl} = \delta_{ij}\,\delta_{kl} + \delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}$. Wegen der Symmetrie von $\vec{\delta}$ sind nur die angeführten 3 Glieder voneinander verschieden. Dagegen hat das Produkt zweier verschiedener, symmetrischer Tensoren zweiter Stufe sechs Summenglieder.

Das Produkt $\vec{x}^n \cdot \vec{x}^m$ hat jedoch nur ein Glied !

$(\vec{x}^n \cdot \vec{x}^m)_{i_1 \dots i_n \dots i_{n+m}} = x_{i_1} \dots x_{i_n} \dots x_{i_{n+m}}$

Wenn Mißverständnisse unmöglich sind, werden die unteren Indizes gelegentlich weggelassen.

Nach diesen Definitionen sei wieder das System (2) (3) betrachtet. Die rechten Seiten von (2) (3) werden in folgender Weise abgekürzt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{\xi}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} = C_1 \tag{4}$$

$$\frac{\partial f_{2i}}{\partial t} + \vec{\xi}_2 \cdot \frac{\partial f_{2i}}{\partial \vec{r}} = C_{2i} \tag{5}$$

Das System (4) (5) kann durch ein äquivalentes System von Momentengleichungen ersetzt werden. Dazu multipliziert man die Gleichung (4) mit $(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^n$ und integriert über $\vec{\xi}_1$, während die Gleichungen (5) mit $(\vec{\xi}_2 - \vec{u})^n \cdot \varepsilon_i^m$ multipliziert, über $\vec{\xi}_2$ integriert und über i summiert werden. Dabei ist vorläufig $\vec{u}$ eine willkürliche Funktion von $\vec{r}$, die sogar für f_1 und f_{2i} verschieden gewählt werden könnte. Es zeigt sich jedoch, daß die niedrigsten Momentengleichungen gerade zu besonders einfachen, physikalisch leicht interpretierbaren Gleichungen werden, wenn man für $\vec{u}$ die mittlere Massengeschwindigkeit wählt. Diese wird weiter unten genauer definiert.

Folgende Abkürzungen für die Momente von f bzw. die Stoßintegrale seien definiert:

$$N^{(n)} = \int f_1 (\vec{\xi}_1 - \vec{u})^n \, d\vec{\xi}_1$$

$$M^{(n,m)} = \sum_i \int f_{2i} (\vec{\xi}_2 - \vec{u})^n \varepsilon_i^m \, d\vec{\xi}_2 \tag{6}$$

$$C_{(1)}^{(n)} = \int c_1 \left(\vec{\xi}_1 - \vec{u}\right)^n d\vec{\xi}_1$$

$$C_{(2)}^{(n,m)} = \sum_i \int c_{2i} \left(\vec{\xi}_2 - \vec{u}\right)^n \varepsilon_i^m d\vec{\xi}_2 \qquad (7)$$

Die unteren Indizes der Tensoren $N^{(n)}$, $M^{(n,m)}$ etc. wurden dabei weggelassen, was bedeutet, daß sie beliebig wählbar sind. Werden ein oder mehrere Indizes an einen Tensor herangeschrieben so bedeutet dies, daß diese Indizes festgegelegt sind, während über die anderen noch frei verfügt werden kann: So werden z.B. in den folgenden Momentengleichungen nur die Indizes herausgeschrieben, über die zu summieren ist. Man erhält so die allgemeinen Momentengleichungen des Systems (4) (5) :

$$\frac{D}{Dt} N^{(n)} + \frac{D\vec{u}}{Dt} N^{(n-1)} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} N^{(n)} + \frac{\partial}{\partial x_i} N_i^{(n+1)} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} N_i^{(n)} = C_{(1)}^{(n)} \qquad (8)$$

$$\frac{D}{Dt} M^{(n,m)} + \frac{D\vec{u}}{Dt} M^{(n-1,m)} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} M^{(n,m)} + \frac{\partial}{\partial x_i} M_i^{(n+1,m)} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} M_i^{(n,m)} = C_2^{(n,m)} \qquad (9)$$

Dabei bedeutet $\frac{D}{Dt}$ die EULERsche Ableitung

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (10)$$

Die niedrigsten Momente $N^{(n)}$ und $M^{(n,m)}$ lassen sich bekanntlich leicht als Größen wie Geschwindigkeit, Drucktensor, Wärmestrom etc. interpretieren. Da hier nur eine hydrodynamische Näherungslösung der Stoßgleichungen untersucht wird, werden später auch nur diese niedrigsten Momente mit den zu-

gehörigen Gleichungen auftreten. Es seien deshalb noch folgende spezielle Bezeichnungen einiger Momente eingeführt :

$$\int f_1 \, d\vec{\xi}_1 = n_1$$
$$\sum_i \int f_{2i} \, d\vec{\xi}_2 = n_2 \tag{11}$$

$$\int (\vec{\xi}_1 - \vec{u}) f_1 \, d\vec{\xi}_1 = n_1 (\vec{u}_1 - \vec{u})$$
$$\sum_i \int (\vec{\xi}_2 - \vec{u}) f_{2i} \, d\vec{\xi}_2 = n_2 (\vec{u}_2 - \vec{u}) \tag{12}$$

$$\int (\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2 f_1 \, d\vec{\xi}_1 = \frac{1}{m_1} P^{(1)}$$
$$\sum_i \int (\vec{\xi}_2 - \vec{u})^2 f_{2i} \, d\vec{\xi}_2 = \frac{1}{m_2} P^{(2)} \tag{13}$$

$$\int (\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3 f_1 \, d\vec{\xi}_1 = \frac{1}{m_1} S^{(1)}$$
$$\sum_i \int (\vec{\xi}_2 - \vec{u})^3 f_{2i} \, d\vec{\xi}_2 = \frac{1}{m_2} S^{(2)} \tag{14}$$

$$\int (\vec{\xi}_1 - \vec{u})^4 f_1 \, d\vec{\xi}_1 = \frac{n_1}{m_1} Q^{(1)}$$
$$\sum_i \int (\vec{\xi}_2 - \vec{u})^4 f_{2i} \, d\vec{\xi}_2 = \frac{n_2}{m_2} Q^{(2)} \tag{15}$$

$$\sum_i \int \varepsilon_i f_{2i} \, d\vec{\xi}_2 = n_2 \bar{\varepsilon} \tag{16}$$

$$\sum_i \int \varepsilon_i (\vec{\xi}_2 - \vec{u}) f_{2i} \, d\vec{\xi}_2 = \vec{q} \tag{17}$$

$$\sum_i \int \varepsilon_i \left(\vec{\xi}_2 - \vec{u}\right)^2 f_{2i}\, d\vec{\xi}_2 = n_2 R^{(2)} \tag{18}$$

Dabei ist $m_2 = 2 m_1$ die Masse eines Moleküls. Zusätzlich werden noch definiert :
Die Dichte

$$\rho = m_1 n_1 + m_2 n_2 \tag{19}$$

die mittlere Massengeschwindigkeit

$$\vec{u}: \qquad \rho \vec{u} = m_1 n_1 \vec{u}_1 + m_2 n_2 \vec{u}_2 \tag{20}$$

Der Gesamtdrucktensor $\quad \mathcal{P} = \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)} \tag{21}$

der Gesamtwärmestrom herrührend von der Übertragung kinetischer Energie

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2} \left(S^{(1)} + S^{(2)}\right) \tag{22}$$

Die kinetische Energie pro Volumeneinheit

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{P}_{jj}^{(1)} + \mathcal{P}_{jj}^{(2)} \right) \tag{23}$$

die Gesamtenergie pro Masseneinheit e :

$$\rho e = E_{kin} + n_2 \bar{\varepsilon} + \rho \alpha E_0^* \tag{24}$$

E_D = Dissoziationsenergie, $E_D^* = \frac{E_D}{2m_1}$

die Strömungsenergie pro Masseneinheit:

$$h = e + \frac{u^2}{2} \tag{25}$$

der Dissoziationsgrad

$$\alpha = \frac{m_1 n_1}{\rho} \tag{26}$$

Durch die Namengebung Drucktensor etc. wurde hier bereits die Interpretation der entsprechenden kinetischen Momente als hydrodynamische Zustandsgrößen vorgenommen.

Durch Addition der Gleichung (8) und (9) für die niedrigsten Momente ergeben sich die Erhaltungsgleichungen der Masse, des Impulses und der Energie, wenn man berücksichtigt, daß für die " Stoßinvarianten " die rechten Seiten der Summe von (8) und (9) verschwinden. Es gilt, wenn man die Funktionen

$\psi_1 = \psi_1(\vec{\xi}_1 - \vec{u})$ und $\psi_{2i} = \psi_{2i}(\vec{\xi}_2 - \vec{u}, \varepsilon_i)$

einführt :

$$\int C_1 \psi_1 \, d\vec{\xi}_1 + \sum_i \int C_{2i} \psi_{2i} \, d\vec{\xi}_2 = 0 \tag{27}$$

für die Größen ψ_ν, deren Summe eine Stoßinvariante ist. Dies gilt für die Anzahl der beteiligten Atome, den Gesamtimpuls, die Gesamtenergie.
Dementsprechend ist

$$\psi_1 = m_1 \,,\; m_1(\vec{\xi}_1 - \vec{u}),\; \frac{m_1}{2}(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2_{jj} + \frac{E_0}{2} \qquad (28)$$

und

$$\psi_{2i} = m_2 \,,\; m_2(\vec{\xi}_2 - \vec{u}),\; \frac{m_2}{2}(\vec{\xi}_2 - \vec{u})^2_{jj} + \varepsilon_i$$

Der Beweis von 27) wird durch Symmetrisierung der Stoßintegrale geführt: Er wird im Anhang von (4) gebracht und soll hier nicht wiederholt werden. Zudem ist (27) als Folge der Erhaltungssätze beim Einzelstoß auch ohne detaillierten Beweis einsichtig.

Nach diesen Vorbereitungen ergeben sich die hydrodynamischen Erhaltungsgleichungen:

für n = 0 m = 0 $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \qquad (29)$$

für n = 1 m = 0 $$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} P_i = \qquad (30)$$

für n = 2 m = 0

und m = 1

$$\rho \frac{De}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2} S_{ikk} + q_i + \rho\alpha E_0^*(\vec{u}_1 - \vec{u})_i\right) + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} P_{ki} = 0 \qquad (31)$$

Gleichung (31) kann man noch umformen in eine Gleichung für die Größe h:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2} S_{ikk} + q_i + \rho\alpha E_0^*(\vec{u}_1 - \vec{u})_i + u_k P_{ki}\right) = 0 \qquad (32)$$

Die Gleichungen (29) - (32) unterscheiden sich von den Erhaltungsgleichungen für einatomige Gase dadurch, daß die Energie und der Wärmestrom einen Zusatzterm herrührend von der inneren Energie der Moleküle enthalten. Die Möglichkeit der Dissoziation von Molekülen führt dazu, daß in der Gesamtenergie ein neuer Term proportional der Dissoziationsenergie auftritt, während der Gesamtwärmestrom einen Term enthält, der durch die Diffusion von Atomen bzw. Molekülen und anschließende Rekombination bzw. Dissoziation entsteht.

Die Gleichungen (29) - (31) stellen jedoch kein vollständiges System dar. Gesucht wird hier eine "hydrodynamische Näherungslösung" , d.h. die Größen P_{ij} , S_{ikk} , q_i sollen nur abhängig sein von den Zustandsgrößen der Strömung ρ , $\vec{u}$, e etc. Zusätzlich zu den Variablen der Gleichungen (29) - (31) werden der Dissoziationsgrad α und die innere Energie $n_2 \bar{\epsilon}$ bzw. die innere "Temperatur" als hydrodynamische Zustandsgrößen des dissoziierenden Gases auftreten, die zu zwei weiteren Differentialgleichungen führen. Dagegen werden die Differentialgleichungen für P_{ij} , S_{ikk} , q_i etc. durch Zusatzannahmen zu gewöhnlichen Funktionsabhängigkeiten von den Größen ρ , $\vec{u}$, e , α , $n_2 \bar{\epsilon}$ und deren Gradienten vereinfacht.

§ III Ein spezieller Lösungsansatz

Betrachtet man die Größenordnungen der Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen Stoßtypen, so findet man, daß für nicht zu hohe Temperaturen die Dissoziationswirkungsquerschnitte kleiner als die Anregungsquerschnitte und beide wiederum wesentlich kleiner als die Wirkungsquerschnitte für die Übertragung von Translationsenergie sind. Dies muß dazu führen, daß ein Gas, das sich anfänglich bezüglich aller Freiheitsgrade im "starken" Nichtgleichgewicht befindet, sich zuerst dem Gleichgewicht der Translationsfreiheitsgrade, dann dem der inneren Freiheitsgrade und schließlich dem chemischen Gleichgewicht annähert. Unter starkem Nichtgleichgewicht soll dabei verstanden werden, daß auch die höheren Momente der BOLTZMANN-Funktionen wie z.B. die Größen $P^{(\nu)}$, $S^{(\nu)}$ etc. unabhängige Zustandsgrößen sind. Man weiß jedoch bereits aus der experimentellen Erfahrung, daß diese Unabhängigkeit zeitlich sehr schnell abklingt. Eine Strömung stellt dann nach kurzer Zeit einen Vorgang dar, der "nahe" dem Gleichgewicht liegt. Die Zeitkonstante für das Einstellen des "Quasi-Gleichgewichts" eines Freiheitsgrades ist um so kleiner, je größer der Wirkungsquerschnitt des entsprechenden Stoßtyps ist.

Hier soll der Ansatz gemacht werden, daß die Teilchendichten n_1 der Atome und n_2 der Moleküle unabhängige Größen sind, d.h. der Dissoziationsgrad des Gases ist eine unabhängige Variable (im hydrodynamischen Sinn), die Abweichung vom chemischen Gleichgewicht kann beliebig groß sein.

Die Gleichgewichtsverteilungsfunktion für die Atome bei einer Temperatur ϑ ist die MAXWELL-Verteilung. Von hier kommt man leicht zu dem Ansatz einer "lokalen MAXWELL-Verteilung"

$$f_{01} = \frac{1}{(2\pi R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\vec{F}_1 - \vec{u})^2_{ij}}{2R_1\vartheta}}$$

Dabei darf die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u}$ und die Temperatur ϑ eine vom Ort abhängige Funktion sein. Die Gradienten sollen jedoch so klein sein, daß bei der Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u}$ sich jeweils das Gleichgewicht entsprechend den lokalen Werten einstellen kann. Die natürliche Erweiterung dieses Ansatzes ist eine Entwicklung um das lokale Gleichgewicht. Dies führt wegen des Gewichtsfaktors $e^{-\frac{x^2}{2}}$ zu einer Entwicklung nach HERMITEschen Polynomen in $\frac{\vec{\xi}_1 - \vec{u}}{(R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}}$. Die Entwicklungskoeffizienten sind dabei Funktionen des Ortes und der Zeit. Dieser Ansatz wurde von GRAD (2) für einatomige Gase gemacht und führt zu hydrodynamischen Gleichungen, wenn man die Reihe in geeigneter Weise abbricht. Weitere Zusatzannahmen vereinfachen die sogenannten "13-Momentengleichungen" von GRAD zu den NAVIER-STOKES-Gleichungen.

In einer weiteren Arbeit (13) behandelt GRAD die mehrdimensionalen HERMITEschen Polynome, so daß hier nur kurz die Form der ersten Polynome angegeben werden soll.

Es wird die dimensionslose Atomgeschwindigkeit $\vec{v}_1$ eingeführt:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{\xi}_1 - \vec{u}}{(R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \tag{33}$$

Dabei bedeutet R_1 die spezifische Gaskonstante der Atome

$$R_1 = \frac{R_0}{M_1} = \frac{k}{m_1}$$

R_0 = allgemeine Gaskonstante

M_1 = Atomgewicht (34)

k = BOLTZMANN-Konstante

$\vec{u}$ sei die mittlere Massengeschwindigkeit definiert durch (20) . Selbstverständlich haftet der Wahl der Bezugsgeschwindigkeit $\vec{u}$ eine gewisse Willkür an. Man könnte auch $\vec{u}_1$, die mittlere Atomgeschwindigkeit oder

$$\vec{u} = \frac{1}{n}\left(n_1 \vec{u}_1 + n_2 \vec{u}_2\right),$$

die mittlere Teilchengeschwindigkeit nehmen. Zur Begründung für die Wahl von $\vec{u}$ soll hier nur gesagt werden, daß $\vec{u}$ augenscheinlich (siehe die Erhaltungsgleichungen (29) - (31)) die Rolle der makroskopischen Strömungsgeschwindigkeit spielt, die man mißt, wenn man strömendes Gas hydrodynamisch untersucht, d.h. von seiner mikroskopischen Zusammensetzung aus Atomen und Molekülen absieht. Neben dieser Auszeichnung von $\vec{u}$ sprechen rechentechnische Vorteile für die Wahl einer einzigen Bezugsgröße, und zwar speziell $\vec{u}$ statt zweier, nämlich $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ (für $\vec{f}_2$).

Die HERMITEschen Polynome n -ten Grades seien mit $H^{(n)}$ bezeichnet. Sie sind symmetrische Tensoren n -ter Stufe. Mit dem Gewichtsfaktor $e^{-\frac{v^2}{2}}$ sind sie orthogonal. Dabei ist die Normierung für die unten angeführten Polynome so gewählt, daß gilt:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v_1^2}{2}} H_i^{(\nu)} \cdot H_j^{(\mu)} \, d\vec{v}_1 = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ \vec{\delta}_{ij}^{\,\nu} & \nu = \mu \end{cases} \tag{35}$$

Die unteren Indizes $i_1 i_2 \cdots i_\nu$ bzw. $j_1 j_2 \cdots j_\mu$ wurden durch i bzw. j abgekürzt. $\vec{\delta}^{\nu}$ ist entsprechend der Multiplikationsregel aus § II zu bilden, jedoch hat jedes $\vec{\delta}$ jeweils ein Indexpaar ij . Das bedeutet, daß

$\vec{\delta}^{\nu}_{ij}$ nur dann nicht verschwindet, wenn die Indizes eine Permutation der Indizes .... sind.

Die ersten, später ausschließlich benutzten HERMITEschen Polynome lauten

$$H^{(0)} = 1$$

$$H_i^{(1)} = v_i$$

$$H_{ij}^{(2)} = v_i v_j - \delta_{ij} \tag{36}$$

$$H_{ijk}^{(3)} = v_i v_j v_k - (v_i \delta_{jk} + v_j \delta_{ik} + v_k \delta_{ij})$$

$$H_{ijkl}^{(4)} = v_i v_j v_k v_l - (v_i v_j \delta_{kl} + v_i v_k \delta_{jl} + v_i v_l \delta_{jk} + v_j v_k \delta_{il} + v_j v_l \delta_{ik} + v_k v_l \delta_{ij}) + (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Die Entwicklung der Verteilungsfunktion f_1 nach HERMITEschen Polynomen wird in der Form angesetzt:

$$f_1 = f_{10} \left(1 + a_i^{(1)}(x,t) H_i^{(1)} + \frac{a_{ij}^{(2)}(x,t)}{2!} H_{ij}^{(2)} + \dots\right) = f_{10} \sum_{\nu=0} \frac{a_{i_\nu}^{(\nu)}}{\nu!} H_{i_\nu}^{(\nu)} \tag{37}$$

mit

$$f_{10} = \frac{n_1}{(2\pi R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v_1^2}{2}}$$

Der Faktor $\nu!$ wurde aus Zweckmäßigkeitsgründen eingeführt, um die $a^{(\nu)}$ als einfache Momente von f_1 ohne Zahlenfaktor ausdrücken zu können. Wegen der Symmetrie der $H_{i_\nu}^{(\nu)}$ gegen Permutationen der Indizes i_ν muß man auch die $a_{i_\nu}^{(\nu)}$ als identisch annehmen, wenn sie sich nur durch Permutationen der i_ν unterscheiden. Damit erhält man durch Multiplikation der Reihe (37) mit $H_{i_\nu}^{(\nu)}$ und Integration unter Verwendung von (35):

$$a_{i_\nu}^{(\nu)}(x,t) = \frac{(R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_1} \int f_1 H_{i_\nu}^{(\nu)} d\vec{v}_1 \qquad (38)$$

ϑ ist dabei ein bisher nicht festgelegter Parameter. Er soll als "Translationstemperatur" der Atome definiert sein, d.h. er wird durch die thermodynamische Beziehung zwischen Temperatur und mittlerer kinetischer Energie der Atome gegeben:

$$\frac{3}{2} n_1 k \vartheta = \frac{1}{2} p_{jj}^{(1)} \qquad (39)$$

Definiert man zusätzlich $p_{jj}^{(\nu)} = 3 p^{(\nu)}$ (4o)

so ergibt sich die Beziehung

$$n_1 k \vartheta = p^{(1)} = n_1 m_1 R_1 \vartheta \qquad (41)$$

die eine Definitionsgleichung für ϑ , keinesfalls aber eine Zustandsgleichung darstellt. Aus (41) folgt die entsprechende Beziehung für die $a_{\nu\nu}^{(2)}$:

$$a_{11}^{(2)}(x,t) = \frac{(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_1}\int f_1\left(v_1 v_1 - \delta_{11}\right) d\vec{v} = \frac{3}{n_1}\left(\frac{\rho^{(1)}}{m_1 R_1 \vartheta} - n_1\right) = 0 \tag{42}$$

Der zweite Entwicklungsparameter, die Massengeschwindigkeit $\vec{u}$ muß über die Definition (20) zu einer weiteren Beziehung zwischen den Entwicklungskoeffizienten führen. Zuvor seien jedoch die Verteilungsfunktionen f_2 betrachtet. Bezüglich der Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten $\vec{\xi}_2$ wird dieselbe Entwicklung nach HERMITEschen Polynomen vorgenommen wie für f_1 . Zusätzlich wird angenommen, daß die "Translationstemperatur" ϑ von Atomen und Molekülen gleich ist. Dies bedeutet, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten σ_{12} ebenso wie die σ_{11} als so groß angenommen werden, daß die kinetische Energie als gleichverteilt über Atome und Moleküle angesehen werden kann. Die Zeitkonstante des Ausgleichs liegt in der Größenordnung weniger Stoßzeiten. Man kann dies leicht für σ_{11} beim einatomigen Gas zeigen (siehe (2) und § VI). Es besteht kein Grund zu der Annahme, daß dieGrößenordnung von σ_{12} wesentlich verschieden von σ_{11} ist, da der Stoßmechanismus in beiden Fällen wenig durch den inneren Aufbau der stoßenden Teilchen beeinflußt werden wird.

Die HERMITEschen Polynome als Funktion von $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{\xi}_2 - \vec{u}}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \tag{43}$$

sollen mit $K^{(\nu)}$ bezeichnet werden. Nach den obigen Bemer-

kungen soll außerdem gelten

$$n_2 k \vartheta = p^{(2)} = \frac{1}{3} p_{jj}^{(2)} = n_2 m_2 R_2 \vartheta \qquad (44)$$

Damit ergibt sich die Entwicklung für f_{2i} :

$$f_{2i} = f_{20i} \left(1 + c_k^{(1,i)}(x,t,\varepsilon_i) k_k^{(1)} + c_k^{(2,i)}(x,t,\varepsilon_i) \frac{k_k^{(2)}}{2!} + \cdots\right) \qquad (45)$$

Setzt man den Ansatz für f_1 und f_{2i} in die BOLTZMANN-Gleichungen (2) (3) ein, so erhält man ein diesen äquivalentes System von partiellen Differentialgleichungen für die Koeffizienten $a^{(\nu)}$ und $c^{(\nu,i)}$. Es sol hier darauf verzichtet werden dieses System anzugeben, da es später nicht verwendet wird. Vielmehr werden die Momentengleichungen (8) (9) als Ausgangspunkt dienen.

Unser bisheriger Ansatz für f_{2i} soll nun um einen Ansatz für die Koeffizienten $c^{(\nu,i)}$ erweitert werden. Sieht man einmal davon ab, daß die ε_i diskrete Werte annehmen, so kann man die $c^{(\nu,i)}$ und f_{2i} als Funktionen des kontinuierlichen Parameters ε ansehen. Die absolute Gleichgewichtsverteilung der inneren Energie bei einer Temperatur Θ ist die BOLTZMANNsche e -Verteilung:

$$f_{20\varepsilon} = e^{-\frac{\varepsilon}{k\Theta}} \qquad (46)$$

Die der Entwicklung nach HERMITEschen Funktionen analoge Entwicklung der Koeffizienten $c^{(\nu)}(x,t,\varepsilon)$ nach orthogonalen Funktionen in ε müßte dann eine Entwicklung in LAGUERREschen Funktionen des dimensionslosen Parameters

$\frac{\varepsilon}{k\Theta}$ sein. Es sei definiert

$$\eta = \frac{\varepsilon}{k\Theta} \tag{47}$$

Der Gewichtsfaktor der LAGUERREschen Funktionen ist $e^{-\eta}$, die Integration läuft von 0 bis ∞. Dies paßt auch zu der Energieskala, die hier festgesetzt werden soll. Die Energie der Moleküle im Grundzustand sei 0, während ein Atom mit der halben Dissoziationsenergie $\frac{E_D}{2}$ behaftet sei. Die ersten LAGUERREschen Polynome lauten:

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= 1 \\ L^{(1)} &= 1 - \eta \\ L^{(2)} &= 1 - 2\eta + \frac{\eta^2}{2} \end{aligned} \tag{48}$$

Die vollständige Entwicklung von f_2 ( ) würde also bei kontinuierlicher Abhängigkeit von dem Parameter ε lauten:

$$f_2(\varepsilon) = f_{20} \sum_{\nu\mu} \frac{b^{(\nu,\mu)}(x,t)}{\nu!} K^{(\nu)}(\vec{\vartheta}) L^{(\mu)}(\eta) \tag{49}$$

mit

$$f_{20} = \frac{1}{(2\pi R_2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\vartheta^2}{2} - \eta} \tag{50}$$

Die Entwicklung (49) ist richtig, wenn man es mit einem kontinuierlichen Spektrum ε für einen Freiheitsgrad zu tun hat. Nun hat aber ein Molekül mehr als einen Freiheitsgrad. Es muß also der Ansatz (49) entsprechend erweitert werden. Im Falle der 3 kinetischen Freiheitsgrade wurde dies durch Einführung der dreidimensionalen HERMITEschen Polynome

erreicht. Die Tatsache, daß ε_i diskrete Werte annimmt, soll vorläufig weiter vernachlässigt werden. Tatsächlich lassen sich die auftretenden Summen in weiten Bereichen des Spektrums gut durch Integrale annähern, so daß die Annahme kontinuierlicher Parameter ε zumindest für das Auffinden eines passenden Lösungsansatzes erlaubt ist.

Es sei für den κ -ten Freiheitsgrad der dimensionslose Energieparameter

$$ {}^{\kappa}\eta = \frac{{}^{\kappa}\varepsilon}{k\Theta} \qquad (51) $$

definiert. Es wird angenommen, daß es sinnvoll ist, eine gemeinsame "innere Temperatur" Θ einzuführen. Dies bedeutet praktisch, daß angenommen wird, es handele sich um verschiedene Freiheitsgrade desselben Anregungstyps. Im Falle zweiatomiger Moleküle haben wir drei Anregungstypen, die elektronische Anregung der Außenhülle, die Rotations und Schwingungsanregung. Diese Anregungstypen sind außerordentlich verschieden leicht anregbar. Die Anregung der Rotationszustände, die schon bei wenigen ^{o}K im Gleichgewicht vollständig ist, kann in guter Näherung bei den hohen Temperaturen, die bei dissozierenden Gasen vorliegen, als im Gleichgewicht mit der Translationstemperatur angesehen werden. Dagegen ist die Schwingungsanregung sehr viel schwieriger. Die Schwingungsfreiheitsgrade zweiatomiger Moleküle werden erst bei einigen tausend Grad Kelvin voll angeregt. Für die Schwingungsfreiheitsgrade muß man also sinnvoll eine innere Temperatur Θ ungleich der Translationstemperatur ϑ ansetzen. Dabei ist die "innere Temperatur" Θ wieder durch die thermodynamische Gleichgewichtsbeziehung zwischen Temperatur und mittlerer Energie definiert :

$$ c_{\Theta}\, d\Theta = d(e_{\Theta}) \qquad (52) $$

wobei c_{Θ} die spezifische Wärme bei konstanten Volumen,

e_0 die spezifische Energie des betreffenden Anregungstyps sind.

Das Problem soll so weiter behandelt werden, als gäbe es nur einen Anregungstyp mit der inneren Temperatur Θ. Die Erweiterung auf mehrere Anregungstypen ist natürlich möglich. Nur müßten dann bereits die Ausgangsgleichungen (2) (3) erweitert werden und es müßte eine Verteilungsfunktion

eingeführt werden, die nicht nur von der Gesamtenergie, sondern auch von der Verteilung der Energie über die verschiedenen Anregungsmodi abhängt.

Es sei wieder die Entwicklung (49) betrachtet. Mit der Definition (51) kann man sie erweitern, indem für jedes $^{k}\eta$ die entsprechende Entwicklung angesetzt und die Reihen multipliziert werden. Es ergibt sich dann ein

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\,{}^{1}\varepsilon, {}^{2}\varepsilon, \ldots, {}^{k}\varepsilon)$$

das von den Energiewerten, die die verschiedenen Freiheitsgrade annehmen, abhängt : (Tatsächlich ist das hier angewandte Verfahren nicht ganz korrekt, da quantenmechanisch der Satz ${}^{1}\varepsilon \ldots {}^{k}\varepsilon$ von Energiewerten zu den verschiedenen Freiheitsgraden gar nicht gleichzeitig meßbar sein muß. Man muß also an dieser Stelle mit klassischen Vorstellungen arbeiten, um die folgenden Ansätze zu verstehen).

$$\tilde{f}_2 = \tilde{f}_{20} \sum_{\nu} \left(\sum_{\mu_1} {}^{1}\tilde{b}^{(\nu,\mu_1)} L^{(\mu_1)}({}^{1}\eta) \right) \cdots \left(\sum_{\mu_k} {}^{k}\tilde{b}^{(\nu,\mu_k)} L^{(\mu_k)}({}^{k}\eta) \right) \frac{1}{\nu!} k^{(\nu)} \tag{53}$$

$$\tilde{f}_{20} = \frac{n_2}{(2\pi R_2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v_2^2}{2}} e^{-{}^{1}\eta - {}^{2}\eta - \cdots - {}^{k}\eta} \tag{54}$$

Man sieht sofort, daß der Ansatz (53) in dieser Form unbrauchbar ist, da die Reihe (53) mehr Information enthält, als $f_2(\xi)$, das nur von der Gesamtenergie $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \dots, \frac{5}{2}$ abhängen soll. Der Ansatz (53) muß also entsprechend vergröbert werden. Vorher sei jedoch noch einmal die Entwicklung für f_1 betrachtet.

Das System unendlich vieler Differentialgleichungen für die $a^{(\nu)}$ und $c^{(\nu,i)}$, wie es sich aus den Entwicklungen (37) und (45) ergibt, ist natürlich genauso schwierig zu lösen, wie das ursprüngliche System der BOLTZMANN-Gleichungen (2) (3) . Wenn man sich aber auf die Frage nach der speziellen Lösung der Gleichungen (2) (3) beschränkt, die eine Strömung beschreibt, deren Verteilungsfunktionen sehr nahe den MAXWELL-Verteilungen liegen, so kann man das System der Differentialgleichungen durch Abbrechen der Entwicklungen endlich machen. Hier sollen die Reihen (37) und (45) für $\nu > 3$ abgebrochen werden.Das bedeutet, es werden die höheren Entwicklungskoeffizienten als verschwindend klein betrachtet. Es wird also der Näherungsansatz für eine spezielle Lösung gemacht :

$$a^{(\nu)}(x,t) = 0 \quad \text{für} \quad \nu > 3$$
$$c^{(\nu,i)}(x,t) = 0 \quad \text{für} \quad \nu > 3 \qquad (55)$$

Dieser Ansatz erscheint auf den ersten Blick etwas willkürlich. Daß er entsprechend der gewünschten hydrodynamischen Näherung sinnvoll sein wird, sieht man, wenn man die ersten Koeffizienten $a^{(\nu)}(x,t)$ durch die Momente (11) - (18) ausdrückt.
Es ergibt sich :

$$a^{(1)}(x,t) = \frac{(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_1}\int H^{(1)} f_1 \, d\vec{v}_1 = \frac{1}{n_1}\int \frac{\vec{\xi}_1 - \vec{u}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}} f_1 \, d\vec{\xi}_1$$

$$= \frac{\vec{u}_1 - \vec{u}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \qquad (56)$$

$$a^{(2)}(x,t) = \frac{(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_1}\int H^{(2)} f_1 \, d\vec{v}_1 = \frac{P^{(1)}}{n_1 m_1 R_1 \vartheta} - \vec{\delta} \qquad (57)$$

$$a^{(3)}(x,t) = \frac{(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_1}\int H^{(3)} f_1 \, d\vec{v}_1 = \frac{S^{(1)}}{n_1 m_1 (R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}} - \left(\frac{\vec{u}_1 - \vec{u}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \cdot \vec{\delta}\right) \qquad (58)$$

$$a^{(4)}(x,t) = \frac{(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_1}\int H^{(4)} f_1 \, d\vec{v}_1 = \frac{Q^{(1)}}{m_1 (R_1\vartheta)^2} - \left(\frac{P^{(1)}}{n_1 m_1 R_1 \vartheta} \cdot \vec{\delta}\right) + \vec{\delta}^{\,2} \qquad (59)$$

Man sieht, daß man, um das System der Erhaltungsgleichungen (29) - (31) vollständig zu machen, mindestens Glieder der Entwicklung bis $a^{(3)}$ mitnehmen muß. Setzt man $a^{(2)}$ und $a^{(1)}$ ebenfalls als verschwindend klein an, so bedeutet dies, daß man den Wärmestrom $S^{(1)}_{ijj}$ und den Drucktensor $\left(P^{(1)} - \frac{1}{3} P^{(1)}_{jj}\vec{\delta}\right)$ als verschwindend klein ansieht. Auf diese Weise erhält man die EULERschen-Gleichungen des Problems. Sucht man jedoch Gleichungen vom Typ der NAVIER-STOKES Gleichungen, so muß man auch $a^{(2)} \neq 0$ und $a^{(3)} \neq 0$ ansetzen. Dagegen enthält $a^{(4)}$ bereits das neue Moment $Q^{(1)}$, das in den Erhaltungsgleichungen nicht vorkommt. Es erscheint daher sinnvoll, den Ansatz $a^{(\nu)} = 0$ für $\nu > 3$ zu machen.
Es folgt der Ansatz :

$$f_1 = f_{10}\left(1 + a^{(1)}H^{(1)} + \frac{a^{(2)}}{2!}H^{(2)} + \frac{a^{(3)}}{3!}H^{(3)}\right) \qquad (60)$$

Die nächste Frage ist die nach dem entsprechenden Abbrechen der Entwicklung (53) . Ohne explizit auf den Zusammenhang mit den Momenten von f_2 einzugehen, erhält man

$$ {}^{k}\tilde{b}^{(\nu,\mu)} = 0 \qquad \text{für} \quad \nu+\mu > 3 \tag{61} $$

Man muß dazu nur beachten, daß lineare Entwicklungsterme in ${}^{k}\eta$ das Gewicht quadratischer Terme in $\vec{v}$ haben. Da man annehmen muß, daß die Translationstemperatur ϑ und die innere Temperatur Θ sich nicht um Größenordnungen unterscheiden, gilt für die Mittelwerte von v^2 und η :

$$ \overline{v^2} \approx \overline{\eta} $$

Diese Beziehung kann man zum Abschätzen der Größenordnungen der Koeffizienten $\tilde{b}^{(\nu,\mu)}$ benutzen und erhält damit (61) .

Die Entwicklung (53) wird dadurch zu dem Ansatz :

$$ \begin{aligned} \tilde{f} = \tilde{f}_0 \Big[1 + \Big({}^{1}\tilde{b}^{(0,1)} L^{(1)}({}^{1}\eta) + {}^{2}\tilde{b}^{(0,1)} L^{(1)}({}^{2}\eta) + \cdots + {}^{k}\tilde{b}^{(0,1)} L^{(1)}({}^{k}\eta) \Big) + \\ + \tilde{b}^{(1,0)} k^{(1)} + \Big({}^{1}\tilde{b}^{(1,1)} L^{(1)}({}^{1}\eta) + \cdots + {}^{k}\tilde{b}^{(1,1)} L^{(1)}({}^{k}\eta) \Big) k^{(1)} + \\ + \frac{\tilde{b}^{(2,0)}}{2!} k^{(2)} + \frac{\tilde{b}^{(3,0)}}{3!} k^{(3)} \Big] \end{aligned} \tag{62} $$

mit $$ \tilde{b}^{(\nu,\mu)} = \sum_{k} {}^{k}\tilde{b}^{(\nu,\mu)} $$

Da f_2 nur von der Summe $\eta = \sum_k {}^k\eta$ abhängen soll, wird der Ansatz (62) weiter vergröbert. Es wird gesetzt :

$$\tilde{b}^{(0,1)} L^{(1)}(\eta) + \cdots + \tilde{b}^{(0,1)}({}^k\eta) = \frac{1}{k}\, \tilde{b}^{(0,1)} \sum_k L^{(1)}({}^k\eta) \tag{63}$$

$$\tilde{b}^{(1,1)} L^{1}(\eta) + \cdots + \tilde{b}^{(1,1)} L^{(1)}({}^k\eta) = \frac{1}{k}\, \tilde{b}^{(1,1)} \sum_k L^{(1)}({}^k\eta) \tag{64}$$

$$\sum_k L^{(1)}({}^k\eta) \overset{\text{def}}{=} L(\eta) = K - \eta \tag{65}$$

Es folgt :

$$\tilde{f}_2 = f_{20}\Big(1 + \tilde{b}^{(0,1)}\Big(1 - \frac{\eta}{k}\Big) + \tilde{b}^{(1,0)} k^{(1)} + \tilde{b}^{(1,1)}\Big(1 - \frac{\eta}{k}\Big) k^{(1)} + \frac{\tilde{b}^{(2,0)}}{2!} k^{(2)} + \frac{\tilde{b}^{(3,0)}}{3!} k^{(3)}\Big) \tag{66}$$

Wegen der Orthogonalität der $L^{(\mu)}({}^k\eta)$ erhält man die

$$\tilde{b}^{(\nu,\mu)} = \sum_k {}^k\tilde{b}^{(\nu,\mu)}$$

auf der rechten Seite von (53), indem man mit

$$\sum_k L^{(\mu)}({}^k\eta)\, k^{(\nu)}$$

multipliziert und über alle ${}^k\eta$ und $\vec{\sigma}$ integriert. Speziell für $\tilde{b}^{(0,1)}$, $\tilde{b}^{(1,1)}$ und $\tilde{b}^{(\mu,0)}$ ergibt sich :

$$\tilde{b}^{(0,1)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\tilde{f}_2({}^1\varepsilon,\ldots,{}^k\varepsilon)\sum_k(1-{}^k\eta)\,d\vec{v}_2\,d^1\eta\ldots d^k\eta \tag{67}$$

$$\tilde{b}^{(1,1)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\tilde{f}_2({}^1\varepsilon,\ldots,{}^k\varepsilon)\sum_k(1-{}^k\eta)\,K^{(1)}(\vec{v}_2)\,d\vec{v}_2\,d^1\eta\ldots d^k\eta \tag{68}$$

$$\tilde{b}^{(\mu,0)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\tilde{f}_2({}^1\varepsilon,\ldots,{}^k\varepsilon)\,K^{(\mu)}(\vec{v}_2)\,d\vec{v}_2\,d^1\eta\ldots d^k\eta \tag{69}$$

Es wird behauptet, daß $\tilde{b}^{(0,1)} = 0$. Dazu sei die Definitionsgleichung für Θ (52) noch einmal betrachtet. Ist ein Anregungstyp bei einer Temperatur voll angeregt, was hier ja angenommen wurde, so ist bekanntlich die zugehörige spezifische Wärme gleich Zahl der Freiheitsgrade mal der BOLTZMANN-Konstante mal Anzahl der Teilchen in der Masseneinheit. Man kann dann (52) durch die einfachere Beziehung ersetzen :

$$k \cdot \not{k}\Theta = \bar{\varepsilon} \tag{70}$$

$\bar{\varepsilon}$ = mittlere Energie des betrachteten Anregungstyps pro Molekül.
Andererseits gilt

$$\frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\tilde{f}_2(\varepsilon)\sum_k {}^k\eta\,d\vec{v}\,d^1\eta\ldots d^k\eta = \frac{\bar{\varepsilon}}{\not{k}\Theta} \tag{71}$$

Aus (67) (70) und (71) folgt somit die Behauptung

$$\tilde{b}^{(0,1)} = 0 \tag{72}$$

(72) entspricht der Gleichung (42) :

$a_{\nu\nu}^{(2)}(x,t) = 0$, die ebenfalls eine Folge der Definition der Temperatur ϑ war.

Bisher wurde angenommen, daß ε ein kontinuierlicher Parameter ist. Damit ließ sich der Ansatz (66) herleiten. Den zu (66) analogen Ansatz für einen diskreten Energieparameter η_i erhält man nun leicht aus (66) (67) (68) (69) , indem man η mit einem Index i versieht und die Integration über die Parameter ${}^1\eta$, ${}^2\eta$, $\cdots$ ${}^k\eta$ durch die Summation über i ersetzt. Bei Entartung einiger Energiewerte ε_i werden diese mit fortlaufenden Indizes gezählt, die Summe enthält also eventuell denselben Energiewert mehrfach. Man findet:

$$f_{2i} = f_{20i}\left(1 + b^{(1)}(x,t)K^{(1)} + b^{(1,1)}(x,t)\,K^{(1)}\left(\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\right) + \right. \tag{73}$$
$$\left. + \frac{b^{(2)}(x,t)}{2!}K^{(2)} + \frac{b^{(3)}(x,t)}{3!}K^{(3)}\right)$$

mit

$$f_{20i} = \frac{1}{(2\pi R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{Z}\cdot\exp\left(-\eta_i - \frac{v_2^2}{2}\right), \quad Z = \text{Zustandssumme}$$

Dabei gelten für die Koeffizienten $b^{(\nu)}$ die Gleichungen :

$$b^{(1,1)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\,\frac{k\Theta}{\bar{\varepsilon}}\sum_i \int f_{2i}\,K^{(1)}\left(\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\right)d\vec{v}_2 \tag{74}$$

$$b^{(\nu)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\sum_i \int f_{2i}\,K^{(\nu)}\,d\vec{v}_2 \tag{75}$$

Die Mühe, den Ansatz (73) (74) (75) über die LAGUERREschen Polynome zu finden, kann man sparen, wenn man für f_{2i} einen linearen Potenzreihenansatz in η_i macht :

$$f_{2i} = f_{20i}\left(C^{(0,0)} + C^{(1,0)}k^{(1)} + \frac{C^{(2,0)}}{2!}k^{(2)} + \frac{C^{(3,0)}}{3!}k^{(3)} + C^{(0,1)}\eta_i + C^{(1,1)}\eta_i k^{(1)}\right) \tag{76'}$$

Indem man (76') mit $k^{(\nu)}$ multipliziert, integriert und summiert, erhält man gewisse Beziehungen für die Koeffizienten $C^{(\nu,\mu)}$. Danach erweist sich der Ansatz (76') als identisch mit (73) (74) (75), (siehe dazu (7)). Der einfache lineare Ansatz in η_i erscheint jedoch zuerst etwas willkürlich. Zwar dürfen Glieder mit η_i^2 wegen der früher gemachten Überlegungen in dieser Näherung nicht vorkommen. Es ist jedoch aus (76') und den zugehörigen Koeffizientengleichungen nicht ersichtlich, daß es sich tatsächlich um genau den entsprechenden Ansatz wie bei dem Ansatz in HERMITEschen Polynomen für die Abhängigkeit von η_i handelt.

Der Zusammenhang mit den früher definierten Momenten ergibt sich für die $b^{(\nu)}$ durch die folgenden Beziehungen

$$b^{(1)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\sum_i \int f_{2i}\, k^{(1)}\, d\vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2 - \vec{u}}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \tag{76}$$

$$b^{(2)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\sum_i \int f_{2i}\, k^{(2)}\, d\vec{v}_2 = \frac{P^{(2)}}{n_2 m_2 R_2\vartheta} - \vec{\delta} \tag{77}$$

$$b^{(3)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\sum_i \int f_{2i}\, k^{(3)}\, d\vec{v}_2 = \frac{S^{(2)}}{n_2 m_2 (R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} - \tag{78}$$

$$- \frac{\vec{\delta}\cdot(\vec{u}_2 - \vec{u})}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$b^{(4)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\sum_i \int f_{2i}\, k^{(4)}\, d\vec{v}_2 = \frac{Q^{(2)}}{m_2(R_2\vartheta)^2} - \tag{79}$$

$$- \frac{P^{(2)}\vec{\delta}}{n_2 m_2 R_2\vartheta} + \vec{\delta}^2$$

$$b^{(1,1)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\frac{k\theta}{\bar{\varepsilon}}\sum_i \int f_{2i}\, k^{(1)}\left(\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\theta}\right) d\vec{v}_2 =$$

$$= \frac{\vec{q}}{n_2\,\bar{\varepsilon}(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\vec{u}_2 - \vec{u}}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \qquad (80)$$

Noch eine letzte Näherung wird in dem speziellen Lösungsansatz f_1 und f_{2i} gemacht. In den Erhaltungsgleichungen (2) (3) treten nur die verjüngten Tensoren des Wärmestroms

$$S_{ijj}^{(\nu)} \overset{def}{=} S_i^{(\nu)} \qquad \text{auf.}$$

Der Ansatz für f_1 und f_{2i} kann also noch vereinfacht werden, indem man $S_{ijk}^{(\nu)}$ als diagonal annimmt. Dann hat man wirklich einen Ansatz, der gerade die Mindestanzahl von Koeffizienten enthält, die nötig ist, um die Erhaltungsgleichungen zu einem vollständigen System der auftretenden Größen zu machen.
Es soll also gelten:

$$S_{ijk}^{(\nu)} = \frac{1}{5}\left(S_i^{(\nu)}\delta_{jk} + S_j^{(\nu)}\delta_{ik} + S_k^{(\nu)}\delta_{ij}\right) \qquad (81)$$

(81) ist äquivalent der Annahme, daß $a^{(3)}$ und $b^{(3)}$ diagonal sind. Man kann statt der vollen HERMITEschen Polynome dritter Stufe verjüngte $\bar{H}_i^{(3)}$ und $\bar{k}_i^{(3)}$ einführen:

$$\bar{H}_i^{(3)} = H_{ijj}^{(3)} = v_{1i}\left(v_1^2 - 5\right)$$

$$\bar{k}_i^{(3)} = k_{ijj}^{(3)} = v_{2i}\left(v_2^2 - 5\right) \qquad (82)$$

Ersetzt man in (60) und (73) die Terme $\frac{a_{ijk}^{(3)}}{3!} H_{ijk}^{(3)}$ und $\frac{b_{ijk}^{(3)}}{3!} k_{ijk}^{(3)}$ durch $\bar{a}_i^{(3)} \bar{H}_i^{(3)}$ und $\bar{b}_i^{(3)} \bar{k}_i^{(3)}$

so findet man, wenn man den neuen Ansatz mit $\bar{H}_i^{(3)}$ bzw. $\bar{k}_i^{(3)}$ multipliziert und integriert

$$\frac{(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_1}\int f_1 \bar{H}_i^{(3)} d\vec{v}_1 = \bar{\bar{a}}_k^{(3)} \int e^{-\frac{v_1^2}{2}} \bar{H}_k^{(3)} \bar{H}_i^{(3)} d\vec{v} = 10\,\bar{\bar{a}}_i^{(3)} \tag{83}$$

bzw.

$$\frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\sum_i \int f_{2i} \bar{k}^{(3)} d\vec{v} = 10\,\bar{\bar{b}}^{(30)} \tag{84}$$

Um auch hier wieder den Zahlenfaktor 10 zu beseitigen, seien neue Koeffizienten definiert:

$$\bar{a}_i^{(3)} = \frac{1}{10}\,\bar{\bar{a}}_i^{(3)}$$

$$\bar{b}_i^{(3)} = \frac{1}{10}\,\bar{\bar{b}}_i^{(3)} \tag{85}$$

Somit lautet der endgültige Ansatz:

$$f_1 = \frac{n_1}{(2\pi R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\vec{v}_1^2}{2}} \left(1 + a^{(1)}H^{(1)} + \frac{a^{(2)}}{2!}H^{(2)} + \frac{\bar{a}^{(3)}}{10}\bar{H}^{(3)}\right) \tag{86}$$

$$f_{2i} = \frac{n_2}{(2\pi R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{v_2^2}{2} - \eta_i\right)\cdot\left[1 + b^{(1,1)}\left(\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\theta}\right)k^{(1)} + b^{(1)}k^{(1)} + \frac{b^{(2)}}{2}k^{(2)} + \frac{b^{(3)}}{10}\bar{k}^{(3)}\right] \tag{87}$$

mit

$$a^{(\nu)} = \frac{(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_1}\int f_1 H^{(\nu)} d\vec{v}_1 \tag{88}$$

$$b^{(\nu)} = \frac{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2}\sum_i \int f_{2i} k^{(\nu)} d\vec{v}_2 \tag{89}$$

$$b^{(1,1)} = \frac{(R_2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_2} \sum_i \int f_{2i}\, k^{(1)}\left(\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\right) d\vec{v}_2 \qquad (90)$$

Der neue Ansatz (86) (87) ist der Gleichung (81) äquivalent. Dies läßt sich z.B. für f_1 leicht zeigen, indem man für f_1 den Ansatz (86) in (60) einsetzt. Man erhält dann

$$a^{(3)}_{ijk} = \frac{(R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}{n_1} \int f_1 H^{(3)}_{ijk}\, d\vec{v}_1 =$$

$$= \frac{\bar{a}_\nu}{10} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-\frac{v_1^2}{2}} \bar{H}^{(3)}_\nu H^{(3)}_{ijk}\, d\vec{v}_1 = \frac{1}{5}\left(\bar{a}_i \delta_{jk} + \bar{a}_j \delta_{ik} + \bar{a}_k \delta_{ij}\right) \qquad (91)$$

Ein Vergleich mit (58) zeigt die Identität von (91) mit (81).

Der Ausgangspunkt aller weiteren Untersuchungen soll nun der spezielle Lösungsansatz (86) (87) sein.

§ IV Die Gleichungen der "hydrodynamischen" Momente

Nach den Vorbereitungen der letzten Kapitel sollen die Gleichungen für $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$ bzw. die diesen äquivalenten Momentengleichungen hergeleitet werden. Die Koeffizienten $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$ sind Linearkombinationen gewisser Momente (siehe (56) - (59) und (76) - (80)). Deshalb ist es nicht nötig, von den Gleichungen für die $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$ auszugehen und dieses System entsprechend dem Näherungsansatz (86) (87) abzubrechen. Vielmehr ist es zweckmäßig, die einfacheren Momentgleichungen (8) (9), als Ausgangspunkt zu benutzen. Setzt man in diese Gleichungen zur Berechnung der rechten Seiten in die Stoßintegrale für f_1 und f_2 die Näherung (86) (87) ein, beachtet ferner den Zusammenhang der Momente mit den $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$, um auch auf der linken Seite die äquivalenten Näherungen einzuführen, so erhält man Gleichungen, die denen der $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$ unter den gemachten Näherungen vollkommen entsprechen. Dies sind jedoch Gleichungen für Momente, die sich unmittelbar durch hydrodynamische Zustandsgrößen interpretieren lassen. Sie bilden zusammen mit den Erhaltungsgleichungen (2) (3) ein vollständiges Gleichungssystem für die gesuchten hydrodynamischen Größen.

Das so gefundene Gleichungssystem ist außerordentlich kompliziert, man könnte höchstens für Spezialfälle versuchen, eine Lösung zu finden. Durch gewisse Zusatzannahmen erreicht man jedoch wesentliche Vereinfachungen. Die entsprechenden Näherungsannahmen führen bei einatomigen Gasen zu den gewöhnlichen NAVIER-STOKES Gleichungen.

Zunächst seien die vollen Momentengleichungen angegeben. Die rechten Seiten werden weiterhin durch $\overline{C}^{(n)}_{(\nu)}$ abgekürzt, der Querstrich soll nur andeuten, daß schon die Näherung

(86) (87) für f_1 und f_{2i} eingesetzt sein soll.
In § V erfolgt dann die Auswertung der rechten Seiten durch teilweise Ausintegration der Stoßintegrale.

Es ergibt sich aus (8) für $n=0$ die Gleichung für die Teilchenzahl n_1 oder den Dissoziationsgrad α. Eine Gleichung für n_2 wird nicht benötigt, da aus der Kontinuitätsgleichung für die Dichte (29) und der Beziehung (19) n_2 bereits folgt. Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_1 + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{u}_1 n_1) = \bar{C}^{(0)}_{(1)} \tag{92}$$

Durch Multiplikation mit m_1 und unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (29) erhält man aus (92) die Gleichung für den Dissoziations grad

$$\rho \frac{D\alpha}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \alpha (\vec{u}_1 - \vec{u})_i \right) = m_1 \bar{C}^{(0)}_{(1)} \tag{93}$$

Für $n=1$ erhält man die Gleichung für die mittlere Geschwindigkeit der Atome $\vec{u}_1$. Wiederum wird die Gleichung für $\vec{u}_2$ nicht benötigt. Zur Ergänzung dient die Impulserhaltungsgleichung (30) und die Definitionsgleichung (20) der Massengeschwindigkeit, Man findet:

$$\frac{D}{Dt} \left(n_1 (\vec{u}_1 - \vec{u}) \right) + \frac{D\vec{u}}{Dt} n_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} n_1 (\vec{u}_1 - \vec{u}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{m_1} P_i^{(1)} \right) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} n_1 (\vec{u}_1 - \vec{u})_i = \bar{C}^{(1)}_{(1)} \tag{94}$$

oder unter Verwendung der Erhaltungsgleichungen:

$$\frac{D}{Dt} \left[\rho \alpha (\vec{u}_1 - \vec{u}) \right] + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left[\rho \alpha (\vec{u}_1 - \vec{u}) \right] + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \left[\rho \alpha (\vec{u}_1 - \vec{u})_i \right] +$$

$$+\frac{\partial P_i^{(1)}}{\partial x_i} - \alpha \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = \bar{\bar{C}}_{(1)}^{(1)} m_1 \qquad (95)$$

Für $n=2$ und $n=3$ sind jeweils zwei Momentengleichungen zu bilden, da die ergänzenden Erhaltungsgleichungen fehlen. Es werden willkürlich die Gleichungen, die man wie die Erhaltungsgleichungen durch Addition der Gleichungen (8) und (9) erhält und die Gleichungen (8) gewählt. Diese Wahl ist wiederum eine Frage der Zweckmäßigkeit in bezug auf die Interpretation durch hydrodynamische Zustandsgrößen.

Aus (8) und (9) ergibt sich für $n=2$ und $m=0$:

$$\frac{D}{Dt} P_{ij} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} S_{kij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} P_{kj} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} P_{ki} = m_1 \bar{C}_{(1)ij}^{(2)} + m_2 \bar{C}_{(2)ij}^{(2)} \qquad (96)$$

Für $n=2$ erhält man aus (8) die Gleichung für $P^{(1)}$:

$$\frac{D}{Dt} P_{ij}^{(1)} - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_k}{\partial x_k} m_1 n_1 (\vec{u}_1 - \vec{u})\right)_{ij} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} P_{ij}^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_k} S_{kij}^{(1)} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} P_k^{(1)}\right)_{ij} = m_1 \bar{C}_{(1)ij}^{(2)} \qquad (97)$$

Dabei wurde in (97) wie in allen anderen Gleichungen $\frac{D\vec{u}}{Dt}$ aus der Impulsgleichung (30) eingesetzt. Außerdem ist in Gleichung (96) und (97) die Näherung (81) für $S_{ijk}^{(v)}$ einzuführen. Es folgt damit:

$$\frac{D}{Dt} P_{ij} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} P_{ij} + \frac{1}{5}\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_j} + \frac{\partial S_j}{\partial x_i} + \frac{\partial S_k}{\partial x_k} \delta_{ij}\right) + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} P_k\right)_{ij} = m_1 \bar{C}_{(1)ij}^{(2)} + m_2 \bar{C}_{(2)ij}^{(2)} \qquad (98)$$

$$\frac{D}{Dt} P_{ij}^{(1)} - \left(\frac{\partial P_k}{\partial x_k} \alpha (\vec{u}_1 - \vec{u})\right)_{ij} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} P_{ij}^{(1)} + \frac{1}{5}\left(\frac{\partial S_i^{(1)}}{\partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial S_j^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial S_k^{(1)}}{\partial x_k} \delta_{ij}\right) + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} P_k^{(1)}\right)_{ij} = m_1 \bar{C}_{(1)ij}^{(2)} \tag{99}$$

Für $n=2$, $m=0$ ergeben sich entsprechend die Gleichungen:

$$\frac{D}{Dt} S_{ijj} - \left(\frac{1}{5} \frac{\partial P_k}{\partial x_k} P\right)_{ijj} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} S_{ijj} + \frac{\partial}{\partial x_k}(n Q_{kijj}) +$$

$$+ 2 \frac{\partial u_j}{\partial x_k} S_{ijk} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} S_{kjj} = m_1 \bar{C}_{(1)ijj}^{(3)} + m_2 \bar{C}_{(2)ijj}^{(3)} \tag{100}$$

$$\frac{D}{Dt} S_{ijj}^{(1)} - \left(\frac{1}{5} \frac{\partial P_k}{\partial x_k} P^{(1)}\right)_{ijj} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} S_{ijj}^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_k}(m_1 Q_{kijj}^{(1)}) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} S_k^{(1)}\right)_{ijj} = m_1 \bar{C}_{(1)ijj}^{(3)} \tag{101}$$

Für $S_{ijk}^{(2)}$ ist wieder die Näherung (81) einzusetzen. Einen Ausdruck für Q bzw. $Q^{(1)}$ findet man, indem man $a^{(4)}$ und $b^{(4)}$ in den Gleichungen (59) und (79) gleich Null setzt. Dadurch erhält man eine Gleichung für $Q^{(1)}$ und $Q^{(2)}$, die genau dem Ansatz (86) entspricht. Es gilt:

$$n_1 Q^{(1)} = R_1 \vartheta (P^{(1)} \vec{\delta}) - (R_1 \vartheta)^2 m_1 n_1 \vec{\delta}^2 =$$

$$= R_1 \vartheta \left[(P^{(1)} \vec{\delta}) - p^{(1)} \vec{\delta}^2\right] \tag{102}$$

$$nQ = n_1 Q^{(1)} + n_2 Q^{(2)} = \frac{R_1 \vartheta}{2} \left[(P + P^{(1)}) \vec{\delta} - (p + p^{(1)}) \vec{\delta}^2\right] \tag{103}$$

Aus Gleichung (100) und (101) entstehen mit (102), (103), (81) die Gleichungen:

$$\frac{D}{Dt} S_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ki}}{\partial x_k} P_{jj} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial P_{kj}}{\partial x_k} P_{ji} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} S_i +$$
$$+ \frac{7}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (R_1 \vartheta P_{ik} + R_1 \vartheta P_{ik}^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (R_1 \vartheta (p + p^{(1)}) +$$
$$+ \frac{2}{5} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} S_i + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} S_k \right) + \frac{7}{5} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} S_k = \tag{104}$$
$$= m_1 \bar{C}^{(3)}_{(1) ijj} + m_2 \bar{C}^{(3)}_{(2) ijj}$$

$$\frac{D}{Dt} S_i^{(1)} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ki}}{\partial x_k} P_{jj}^{(1)} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial P_{kj}}{\partial x_k} P_{ji}^{(1)} + \tag{105}$$
$$+ \frac{\partial u_k}{\partial x_k} S_i^{(1)} + 7 \frac{\partial}{\partial x_k} (R_1 \vartheta P_{ik}^{(1)}) - 2 \frac{\partial}{\partial x_i} (R_1 \vartheta p^{(1)}) +$$
$$+ \frac{2}{5} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} S_i^{(1)} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} S_k^{(1)} \right) + \frac{7}{5} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} S_k^{(1)} = m_1 \bar{C}^{(3)}_{(1) ikk}$$

Um das Differentialgleichungssystem vollständig zu machen, muß man nun noch zwei Gleichungen des Typs (9) für $m = 1$ hinzunehmen, da in der Energiegleichung (31) noch die Größen q_k und vermittels (24) $\bar{\varepsilon}$ als Teil von e auftreten. Es ergibt sich für $m = 1$, $n = 0$ bzw. $n = 1$:

$$\frac{D}{Dt} (n_2 \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} (n_2 \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = \bar{C}^{(0,1)}_{(2)} \tag{106}$$

$$\frac{D}{Dt} q_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ki}}{\partial x_k} (n_2 \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} q_i + \frac{\partial (n_2 R_{ik})}{\partial x_k} + \tag{107}$$
$$+ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q_k = \bar{C}^{(1,1)}_{(2) i}$$

Wiederum ist für R_{ik} ein Näherungsausdruck entsprechend dem Ansatz für f_{2i} einzusetzen. Man kann die gesuchte Näherung für R_{ik} auf zweierlei Weise erhalten. Entweder, man denkt sich entsprechend dem Verfahren bei $Q^{(\nu)}_{ijke}$

die Reihe für $\tilde{f}_2$ fortgesetzt und setzt den Ausdruck für $\tilde{b}^{(1,2)}$, das ist der Koeffizient zu $k^{(2)} L^{(1)}$, nachträglich gleich Null. Oder man multipliziert den speziellen Ansatz (87) mit $(\vec{\xi}_2 - \vec{u})^2 \varepsilon_i$, integriert und summiert. Beides führt zu demselben Ergebnis. Wählt man den zweiten Weg, so findet man:

$$n_2 R_{jk} = \sum_i \int f_{2i} (\vec{\xi}_2 - \vec{u})_{jk}^2 \varepsilon_i \, d\vec{\xi}_2 = R_2 \vartheta \sum_i \int f_{2i} (k^{(2)} + \delta)_{jk} \varepsilon_i \, d\vec{\xi}_2 =$$

$$= R_2 \vartheta n_2 \bar{\varepsilon} \left(b_{jk}^{(2,0)} + \delta_{jk} \right) = \frac{\bar{\varepsilon} \bar{P}_{jk}^{(2)}}{m_2} = \frac{n_2 \bar{\varepsilon} \left(P_{jk} - P_{jk}^{(1)} \right)}{\rho (1 - \alpha)} \tag{108}$$

Mit (108) schreibt sich die Gleichung (107):

$$\frac{D q_i}{D t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ki}}{\partial x_k} (n_2 \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} q_i +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{n_2 \bar{\varepsilon} \left(P_{ik} - P_{ik}^{(1)} \right)}{\rho (1 - \alpha)} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q_k = \bar{C}_{(2)\,i}^{(1,1)} \tag{109}$$

Die Gleichungen (93) (95) (98) (99) (104) (105) (106) (109) bilden zusammen mit den Erhaltungsgleichungen (29) - (31) das gesuchte System von Differentialgleichungen. Bevor dieses System durch weitere Näherungsannahmen wesentlich vereinfacht wird, sollen jedoch die rechten Seiten, die $\bar{C}_{(\mu)}^{(\nu)}$ genauer untersucht werden.

§ V Die Stoßintegrale

Die eigentliche Berechnung der Stoßintegrale ist etwas mühsam. Sie wird deshalb im Anhang durchgeführt. Hier soll nur der allgemeine Weg gezeigt, und das Ergebnis der Berechnungen angegeben werden.

Die auf der rechten Seite der Momentengleichungen stehenden Stoßintegrale enthalten jeweils fünf verschiedene Integraltypen entsprechend den fünf verschiedenen Übergangswahrscheinlichkeiten σ . Diese Anteile werden im Anhang getrennt behandelt. Dabei wird folgende Bezeichnungsweise eingeführt:

$$I_{\nu\mu}(\psi) = \int \psi (f_\nu' \bar{f}_\mu' - f_\nu f_\mu) \sigma_{\nu\mu} \, d\vec{x} \tag{110}$$

$$I^{\alpha\beta'}_{\nu\mu\rho}(\psi) = \int \psi (f_\alpha' f_\beta' - k_1 f_\nu \bar{f}_\mu \bar{\bar{f}}_\rho) \sigma^{\alpha\beta'}_{\nu\mu\rho} \, d\vec{x} \tag{111}$$

ψ kann eine Funktion der Geschwindigkeitsvariablen $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$ und der Energieeigenwerte ε_i sein. $d\vec{x}$ soll symbolisch für das Produkt über alle Volumenelemente der vorkommenden Geschwindigkeiten stehen. Das $\int$ -Zeichen schließt auch ein Summenzeichen mit ein, wenn f_{2i} , f_{2j} etc. unter dem Integralzeichen vorkommen. Mit dieser Bezeichnung erhält man durch passende Umbenennung der Integrationsvariablen für die benötigten rechten Seiten der Momentengleichungen folgende Ausdrücke:

$$\bar{C}^{(0)}_{(1)} = 2\underline{I}^{12'}_{111}(1) + 2\underline{I}^{22'}_{112}(1) \tag{112}$$

$$\bar{C}^{(1)}_{(1)} = \underline{I}_{12}(\vec{\xi}_1 - \vec{u}) + \underline{I}^{12'}_{111}\left(3(\vec{\xi}_1 - \vec{u}) - (\vec{\xi}_1' - \vec{u})\right) + 2\underline{I}^{22'}_{112}(\vec{\xi}_1 - \vec{u}) \tag{113}$$

$$\bar{C}^{(2)}_{(1)} = \underline{I}_{11}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2\right) + \underline{I}_{12}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2\right) + \underline{I}^{12'}_{111}\left(3(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2 - (\vec{\xi}_1' - \vec{u})^2\right) + 2\underline{I}^{22'}_{112}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2\right) \tag{114}$$

$$\bar{C}^{(2)}_{(1)} + 2\bar{C}^{(2)}_{(2)} = \underline{I}_{11}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2\right) + 2\underline{I}_{22}\left((\vec{\xi}_2 - \vec{u})^2\right) + \underline{I}_{12}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2 + 2(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2\right) + \underline{I}^{12'}_{111}\left(3(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2 - (\vec{\xi}_1' - \vec{u})^2 - 2(\vec{\xi}_2' - \vec{u})^2\right) + 2\underline{I}^{22'}_{112}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2 + 2(\vec{\xi}_2' - \vec{u})^2 + (\vec{\xi}_2 - \vec{u})^2\right) \tag{115}$$

$$\bar{C}^{(3)}_{(1)} = \underline{I}_{11}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3\right) + \underline{I}_{12}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3\right) + \underline{I}^{12'}_{111}\left(3(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3 - (\vec{\xi}_1' - \vec{u})^3\right) + 2\underline{I}^{22'}_{112}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3\right) \tag{116}$$

$$\bar{C}^{(3)}_{(1)} + 2\bar{C}^{(3)}_{(2)} = \underline{I}_{11}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3\right) + 2\underline{I}_{22}\left((\vec{\xi}_2 - \vec{u})^3\right) + \underline{I}_{12}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3 + 2(\vec{\xi}_2 - \vec{u})^3\right) + \underline{I}^{12'}_{111}\left(3(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3 - (\vec{\xi}_1' - \vec{u})^3 - 2(\vec{\xi}_2' - \vec{u})^3\right) + 2\underline{I}^{22'}_{112}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3 - 2(\vec{\xi}_2' - \vec{u})^3 + (\vec{\xi}_2 - \vec{u})^3\right) \tag{117}$$

$$\bar{C}^{(0,1)}_{(2)} = \underline{I}_{22}(\varepsilon_i) + \underline{I}_{12}(\varepsilon_i) + \underline{I}^{12'}_{111}(-\varepsilon_j') + \underline{I}^{22'}_{112}(\varepsilon_i - 2\varepsilon_j') \tag{118}$$

$$\bar{C}^{(1,1)}_{(2)} = \underline{I}_{22}\left(\varepsilon_i(\vec{\xi}_2 - \vec{u})\right) + \underline{I}_{12}\left(\varepsilon_i(\vec{\xi}_2 - \vec{u})\right) + \underline{I}^{12'}_{111}\left(-\varepsilon_j'(\vec{\xi}_2' - \vec{u})\right) + \underline{I}^{22'}_{112}\left(\varepsilon_i(\vec{\xi}_2 - \vec{u}) - 2\varepsilon_j'(\vec{\xi}_2' - \vec{u})\right) \tag{119}$$

Einige Integrale I verschwinden, da die zugehörige Funktion ψ eine Stoßinvariante ist. Z.B. ist $I_{11}(1) = 0$. Diese Integrale wurden bereits weggelassen.

Für die weitere Berechnung der Integrale I ist es sinnvoll, vom Laborsystem ins Schwerpunktssystem überzugehen. Man kann dann die Integrationen über alle Variablen mit Ausnahme der Relativschwindigkeitsbeträge und der Winkel zwischen den Relativgeschwindigkeiten ausführen.

Zur Berechnung der Integrale I hat man für die f_1 bzw. f_{2i} den Ansatz (86) (87) einzusetzen. Dadurch zerfallen die einzelnen Integrale I wiederum in eine Summe von Integralen, die multipliziert werden mit Produkten der Koeffizienten $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$. Ein Teil der Integrale verschwindet aus Symmetriegründen, so daß auf der rechten Seite einer Momentengleichung nicht eine Summe aller möglichen Produkte von $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$ auftritt. Diese Symmetrien sind im Schwerpunktssystem leicht überschaubar.

Da das Umschreiben in Schwerpunktskoordinaten und das Auswerten der Symmetrien für die fünf verschiedenen Integraltypen bereits recht umfangreich ist, wird auch dies erst im Anhang erledigt.

Einige weitere Näherungen, die über den Ansatz (86) (87) hinausgehen, werden noch zur Berechnung der Integrale eingeführt. Wie oben bereits erwähnt, bekommt man durch Einsetzen von (86) und (87) in die Stoßintegrale I eine Summe von Gliedern, die $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$ gar nicht oder linear oder als Zweier- und Dreierprodukt enthalten. Die zusätzliche Näherung besteht darin, daß alle Glieder mit Zweier- und Dreierprodukten vernachlässigt werden. Begründet sei dies damit, daß für eine Gültigkeit des Ansatzes (86) (87) bereits notwendig die $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$ klein gegen eins sein

müssen. Die Mehrfachprodukte sind dann klein von zweiter bzw. dritter Ordnung und sollen gegen Größen erster Ordnung vernachlässigbar sein. In (2) wird die Größenordnung der vernachlässigten Zweifachprodukte im Falle des einatomigen Gases näher diskutiert. Für ein spezielles Kraftgesetz läßt sich zeigen, daß bei Gültigkeit des Ansatzes (86) tatsächlich die Mehrfachprodukte vernachlässigt werden können. Diese Abschätzung und die Argumentation mit Größen, die klein von höherer Ordnung sind, soll hier als einzige Begründung dienen. Eine genauere Diskussion würde im vorliegenden Fall zu kompliziert werden.

Weiterhin wird noch angenommen, daß die Translationstemperatur ϑ und die innere Temperatur Θ nicht sehr stark voneinander verschieden sind. Es wird eine mittlere Temperatur des dissoziierenden Gases eingeführt, die wiederum durch die thermodynamische Energie-Temperaturbeziehung definiert ist:

$$d(\epsilon) = d\left(\frac{3}{2}p + n_2\bar{\epsilon} + \frac{n_1}{2}E_0\right) = d\left[\frac{3}{2}(1+\alpha)R_2\vartheta + (1-\alpha)\int_0^{\Theta} c_\Theta\, d\Theta + \right.$$

$$\left. + \alpha E_0^*\right] = \frac{3}{2}(1+\alpha)R_2\, d\vartheta + (1-\alpha)c_\Theta\, d\Theta + \left(\frac{3}{2}R_2\vartheta - \int_0^{\Theta} c_\Theta\, d\Theta + \right.$$

$$\left. + E_0^*\right) d\alpha \overset{def}{=} c_v\, dT + c_\alpha\, d\alpha \qquad (120)$$

c_v ist die spezifische Wärme des Gemisches, wenn keine Reaktionen stattfinden, d.h. α = const. Man muß die Temperatur T mit der spezifischen Wärme des nichtreagierenden Gemisches in Verbindung bringen, da im Falle des beliebigen chemischen Nichtgleichgewichtes der Dissoziationsgrad α eine zweite freie Variable neben der Temperatur ist. Eine Änderung der inneren Energie ist unabhängig durch Änderung der Temperatur und durch Änderung des Dissoziationsgrades möglich. Im chemischen Gleichgewicht ist α

eine Funktion der Temperatur und man kann beide Anteile zu der üblichen spezifischen Wärme eines reagierenden Gemisches zusammenfassen.

Nach dem oben Gesagten ist C_v und C_α gegeben durch:

$$C_v = \frac{3}{2}(1+\alpha) R_2 + (1-\alpha) C_\Theta \tag{121}$$

$$C_\alpha = \frac{3}{2} R_2 T - \int_0^T C_\Theta \, d\Theta + E_0^+ \tag{122}$$

Θ und ϑ sollen wenig verschieden sein, somit kann auch T nur wenig verschieden von Θ und ϑ sein. Ersetzt man in (120) für $d\alpha = 0$ die $d\vartheta, d\Theta, dT$ näherungsweise durch die endlichen Differenzen $\Theta - T_0$, $\vartheta - T_0$, $T - T_0$, so folgt aus (120) die Beziehung:

$$\frac{3}{2}(1+\alpha) R_2 (\vartheta - T) = (1-\alpha) C_\Theta (T - \Theta) \tag{123}$$

Definiert man:

$$\Delta\Theta = \frac{\Theta - T}{T}$$

$$\Delta\vartheta = \frac{\vartheta - T}{T} \tag{124}$$

so schreibt sich (123) auch

$$\Delta\vartheta = -\frac{2(1-\alpha) C_\Theta}{3(1+\alpha) R_2} \Delta\Theta \tag{125}$$

Die Beziehung (125) wird gebraucht, da in den Endgleichungen die mittlere Temperatur T und wahlweise die Translationstemperatur ϑ oder die innere Temperatur θ als Temperaturvariable auftreten.

Die letzte Näherung bei der Berechnung der I hängt ebenfall mit der Forderung $\Delta\vartheta$ und $\Delta\theta$ klein gegen eins zusammen. Alle Größen, die von ϑ und θ abhängen, werden nach $\Delta\vartheta$ und $\Delta\theta$ entwickelt und nur solche Terme beibehalten, die $\Delta\vartheta$ oder $\Delta\theta$ höchstens linear enthalten. Vernachlässigt werden auch alle Produkte mit den kleinen Größen $a^{(v)}$ und $b^{(v)}$.

Diese Näherungen sind bei der Berechnung der I_{11}, I_{12}, I_{22} nicht nötig, sie vereinfachen den Rechenaufwand bei den Dissoziationsintegralen jedoch wesentlich. Sieht man von den rechnerischen Vorteilen ab, so ist diese Näherung deshalb sinnvoll, weil der Ansatz (87) voraussetzt, daß auch die inneren Freiheitsgrade voll angeregt sind und ihre Verteilungsfunktion nahe der Gleichgewichtsverteilung liegt. Das ist aber für die Schwingungsanregung, und diese muß man sich als Anregungstyp bei zweiatomigen Molekülen in dem betrachteten Modell denken, erst bei einigen Tausend Grad Kelvin der Fall. Daher darf die innere Temperatur nicht Größenordnungen kleiner als die Translationstemperatur sein. Die Gleichungen, die man erhält, wenn man ϑ und θ als beliebig verschieden ansieht, würden deshalb nicht nur sehr kompliziert, sondern auch physikalisch falsch sein.

Wendet man die oben behandelten Näherungen auf ein Gas an, in dem nur eine Anregung der Moleküle, jedoch keine Dissoziation möglich ist, so findet man die Gleichungen, die UHLENBECK durch Anwendung des CHAPMAN-ENSHOG-Verfahrens erhielt (3). Diese Gleichungen ergeben sich auch als Spezialfall der hier behandelten Gleichungen für

$$\alpha = 0, \quad \sigma_{111}^{12'} = \sigma_{112}^{22'} = \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$$

Faßt man die im Anhang gefundenen Ergebnisse zusammen, so erhält man für die $\bar{C}_{(\mu)}^{(\nu)}$ die unten angeführten Ausdrücke. Die Koeffizienten A_ν, B_ν etc. setzen sich aus einer größeren Anzahl spezieller Stoßintegrale zusammen. Sie sind noch Funktionen der Temperatur, des Dissoziationsgrades und der Dichte ϱ. Die genauen Ausdrücke für die einzelnen Koeffizienten sind im Anhang e) angegeben.

$$\bar{C}_{(1)}^{(0)} = A_1(T,\alpha,\varrho)\left[1 + a_1(T,\alpha,\varrho)\Delta\vartheta + a_2(T,\alpha,\varrho)\Delta\theta\right] \tag{126}$$

$$\bar{C}_{(1)\nu}^{(1)} = B_1(T,\alpha,\varrho)\,a_\nu^{(1)} + B_2(T,\alpha,\varrho)\,b_\nu^{(1)} + B_3(T,\alpha,\varrho)\,\bar{a}_\nu^{(3)} + B_4(T,\alpha,\varrho)\,\bar{b}_\nu^{(3)} + B_5(T,\alpha,\varrho)\,b_\nu^{(1,1)} \tag{127}$$

$$\bar{C}_{(1)\nu\mu}^{(2)} = \delta_{\nu\mu} C_1(T,\alpha,\varrho)\left[1 + c_1(T,\alpha,\varrho)\Delta\vartheta + c_2(T,\alpha,\varrho)\Delta\theta\right] + a_{\nu\mu}^{(2)} C_3(T,\alpha,\varrho) + b_{\nu\mu}^{(2)} C_4(T,\alpha,\varrho) \tag{128}$$

$$\bar{C}_{(1)\nu\mu}^{(2)} + 2\bar{C}_{(2)\nu\mu}^{(0)} = \delta_{\nu\mu} D_1(T,\alpha,\varrho)\left[1 + d_1(T,\alpha,\varrho)\Delta\vartheta + d_2(T,\alpha,\varrho)\Delta\theta\right] + a_{\nu\mu}^{(2)} D_3(T,\alpha,\varrho) + b_{\nu\mu}^{(2)} D_4(T,\alpha,\varrho) \tag{129}$$

$$\bar{C}_{(1)\nu kk}^{(3)} = E_1(T,\alpha,\varrho)\,a_\nu^{(1)} + E_2(T,\alpha,\varrho)\,b_\nu^{(1)} + E_3(T,\alpha,\varrho)\,\bar{a}_\nu^{(3)} + E_4(T,\alpha,\varrho)\,\bar{b}_\nu^{(3)} + E_5(T,\alpha,\varrho)\,\bar{a}_\nu^{(3)} \tag{130}$$

$$\bar{C}_{(1)\nu kk}^{(3)} + 2\bar{C}_{(2)\nu kk}^{(3)} = F_1(T,\alpha,\varrho)\,a_\nu^{(1)} + F_2(T,\alpha,\varrho)\,b_\nu^{(1)} + F_3(T,\alpha,\varrho)\,\bar{a}_\nu^{(3)} + F_4(T,\alpha,\varrho)\,\bar{b}_\nu^{(3)} + F_5(T,\alpha,\varrho)\,b_\nu^{(1,1)} \tag{131}$$

$$\bar{C}^{(0,1)}_{(2)} = -\frac{3}{2} m_1 D_1 (1 + d_1 \Delta\vartheta + d_2 \Delta\theta) - \frac{E_0}{2} A_1 (1 + a_1 \Delta\vartheta + a_2 \Delta\theta) \tag{132}$$

$$\bar{C}^{(1,1)}_{(2)\nu} = G_1(T,\alpha,\beta)\, a_\nu^{(1)} + G_2(T,\alpha,\beta)\, b_\nu^{(1)} + G_3(T,\alpha,\beta)\, a_\nu^{(3)} + G_4(T,\alpha,\beta)\, b_\nu^{(3)} + G_5(T,\alpha,\beta)\, b_\nu^{(1,1)} \tag{133}$$

Im chemischen Gleichgewicht erhält man aus $\bar{C}^{(0)}_{(1)}$, das die Änderung des Dissoziationsgrades α (Gleichung 93)) gibt, eine Beziehung zwischen Temperatur und Dissoziationsgrad. Vor erreichen des chemischen Gleichgewichts wird sich das Temperaturgleichgewicht zwischen innerer und Translationstemperatur einstellen. Aus Anhang e) entnimmt man die Form von $\bar{C}^{(0)}_{(1)}$ für $\Delta\vartheta = \Delta\theta = 0$

$$\bar{C}^{(0)}_{(1)} = A_1(T,\alpha,\beta) = (\bar{\beta} + \bar{\gamma})(n_1 \bar{A}_1(T) + n_2 \bar{A}_2(T)) \tag{134}$$

Um eine Strömung ständig im lokalen chemischen Gleichgewicht zu halten, müssen die Größen $A_1(T)$ und $A_2(T)$ gegen Unendlich streben (d.h. die Wirkungsquerschnitte σ'^{12}_{111} bzw. σ'^{22}_{112} müssen zumindest sehr groß werden). Dagegen bleibt $\bar{C}^{(0)}_{(1)}$ eine endliche Größe, die nach Gleichung (93) die Änderung des Dissoziationsgrades gibt. (Siehe hierzu (4,5)).
Damit folgt aus (134)

$$\bar{\beta} = -\bar{\varepsilon} \quad , \quad (\bar{\beta} = \beta(T),\ \bar{\varepsilon} = \varepsilon(T)!)$$

Setzt man die Ausdrücke für $\bar{\beta}$ und $\bar{\varepsilon}$ aus Anhang c) (A 65) ein, so ergibt sich daraus das gewöhnliche Massenwirkungsgesetz:

$$\frac{n_1^2}{n_2} = \frac{2^{\frac{3}{2}} (2\pi R_1 T)^{\frac{3}{2}}}{Z \cdot \left(\frac{2h}{m_1}\right)^3} \tag{135}$$

Dieses ersetzt im Falle des chemischen Gleichgewichts die Gleichung (93).

§ VI " Die NAVIER - STOKES " Gleichungen eines Dissoziierenden Gases mit inneren Freiheitsgraden

In den Momentengleichungen (95) (99) (98) (104) (105) (107) werden die Größen

$$\vec{u}_1 - \vec{u},\ P_{ij},\ P_{ij}^{(1)},\ S_i,\ S_i^{(1)},\ \vec{q}$$

als unabhängige hydrodynamische Zustandsvariable angesehen. Man weiß aber sowohl aus dem Experiment wie durch Abschätzungen für $P_{ij} - p\delta_{ij}$ und S_i im Falle einatomiger Gase (2), daß diese Größen bereits nach Zeiten von der Größenordnung einiger Flugzeiten nur noch Funktionen der Strömungsvariablen $\vec{u}$, ϱ , T etc. sind. Diese Tatsache wird zusammen mit einigen weiteren Näherungen benutzt, um die angegebenen Gleichungen so weit zu vereinfachen, daß sie den NAVIER - STOKES Gleichungen im Falle einatomiger Gase entsprechen.

Zuerst seien die Gleichungen (98) und (99) für P_{ij} und $P_{ij}^{(1)}$ betrachtet. Es werden die Spannungstensoren p_{ij} und $p_{ij}^{(1)}$ definiert durch :

$$p_{ij} = P_{ij} - p\delta_{ij} \qquad p_{ij}^{(1)} = P_{ij}^{(1)} - p^{(1)}\delta_{ij} \tag{136}$$

Durch Summation der Gleichungen (98) und (99) erhält man Gleichungen für p und $p^{(1)}$

$$\frac{\partial}{\partial t} p + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} p + \frac{1}{3}\frac{\partial S_k}{\partial x_k} + \frac{2}{3}\frac{\partial u_e}{\partial x_k} p_{ke} = \tag{137}$$

$$= \frac{1}{3} m_1 \left(\bar{C}_{(1)}^{(2)} + 2\,\bar{C}_{(2)}^{(2)} \right)_{ee}$$

$$\frac{D}{Dt} p^{(1)} - \frac{2}{3}\alpha(\vec{u}_1-\vec{u})_e \frac{\partial P_{ke}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} p^{(1)} + \frac{1}{3}\frac{\partial S_k^{(1)}}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{2}{3}\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial x_k} P_{ke}^{(1)} = \frac{1}{3} m_1 \left(\bar{C}^{(2)}_{(1)}\right)_{ee} \qquad (138)$$

Zieht man (137) multipliziert mit δ_{ij} von (98) bzw. (138) von (99) ab und benutzt (128) und (129), so erhält man die Gleichungen der Spannungstensoren P_{ij} und $P_{ij}^{(1)}$

$$\frac{D}{Dt} P_{ij} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} P_{ij} + \frac{1}{5}\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_j} + \frac{\partial S_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial S_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) +$$

$$+ \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\left(P_{kj} + p\delta_{jk}\right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\left(P_{ki} + p\delta_{ki}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_e}{\partial x_k}\left(P_{ke} + p\delta_{ke}\right)\delta_{ij}$$

$$= m_1\left(a_{ij}^{(2)} I_3 + b_{ij}^{(2)} I_4\right) \qquad (139)$$

$$\frac{D}{Dt} P_{ij}^{(1)} + \frac{2}{3}\alpha(\vec{u}_1-\vec{u})_e \frac{\partial\left(P_{ke}+p\delta_{ke}\right)}{\partial x_k}\delta_{ij} - \alpha(\vec{u}_1-\vec{u})_i \frac{\partial\left(P_{kj}+p\delta_{kj}\right)}{\partial x_k}$$

$$- \alpha(\vec{u}_1-\vec{u})_j \frac{\partial\left(P_{ki}+p\delta_{ki}\right)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} P_{ij}^{(1)} + \frac{1}{5}\left(\frac{\partial S_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial S_j^{(1)}}{\partial x_i} -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\frac{\partial S_k^{(1)}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) + \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_k}\left(P_{jk}^{(1)} + p^{(1)}\delta_{jk}\right) + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial x_k}\left(P_{ik}^{(1)} + p^{(1)}\delta_{ik}\right) - \qquad (140)$$

$$- \frac{2}{3}\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial x_k}\left(P_{ke}^{(1)} + p^{(1)}\delta_{ke}\right)\delta_{ij} = m_1\left(a_{ij}^{(2)} C_3 + b_{ij}^{(2)} C_4\right)$$

Nach (57) (77) (39) und (44) sind die Koeffizienten $a_{ij}^{(2)}$ und $b_{ij}^{(2)}$ gegeben durch:

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{P_{ij}^{(1)}}{p^{(1)}} \qquad b_{ij}^{(2)} = \frac{P_{ij}^{(2)}}{p^{(2)}} \qquad (141)$$

Zwischen $p_{ij}^{(1)}$, $p_{ij}^{(2)}$ und p_{ij} bzw. den $p^{(\nu)}$ bestehen nach Gleichung (21) die Beziehungen:

$$p_{ij} = p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)}$$

$$p = p^{(1)} + p^{(2)} = (n_1+n_2) R_1 \vartheta m_1 = (1+\alpha) \rho R_2 \vartheta \tag{142}$$

Damit sind die rechten Seiten von (139) und (140) gegeben durch

$$m_1 \left(a_{ij}^{(2)} D_3 + b_{ij}^{(2)} D_4 \right) = \frac{1}{R_1 \vartheta} \left(p_{ij}^{(1)} \left(\frac{D_3}{n_1} - \frac{D_4}{n_2} \right) + p_{ij} \frac{D_4}{n_2} \right)$$

$$m_1 \left(a_{ij}^{(2)} C_3 + b_{ij}^{(2)} C_4 \right) = \frac{1}{R_1 \vartheta} \left(p_{ij}^{(1)} \left(\frac{C_3}{n_1} - \frac{C_4}{n_2} \right) + p_{ij} \frac{C_4}{n_2} \right) \tag{143}$$

Nun werdennoch drei neue Näherungsangaben gemacht, die äquivalent sind gewissen Forderungen, die die zu beschreibende Strömung erfüllen soll.

1.) Es soll die Strömung eine solche sein, daß die Gradienten der Zustandsvariablen kleine Größen sind. Das bedeutet daß z.B. Stoßfronten durch die Endgleichungen nur bis zu begrenzten Stärken beschrieben werden. Ebenso sollen die Variablen

$$\frac{p_{ij}}{p} , \frac{p_{ij}^{(\nu)}}{p^{(\nu)}} , \frac{S_i}{p (R_1 T)^{\frac{1}{2}}} , \frac{S_i^{(\nu)}}{p^{(\nu)} (R_1 T)^{\frac{1}{2}}} , \frac{\vec{q}_k}{p^{(\nu)} (R_1 T)^{\frac{1}{2}}} , \frac{\vec{u}_1 - \vec{u}}{u}$$

klein von derselben Größenordnung sein. Als erste Näherung werden alle Produkte kleiner Größen als Größen, die klein von zweiter Ordnung sind, vernachlässigt.

2.) Die zweite Näherungsannahme bezieht sich auf die zeitliche Variation der Strömungsgrößen.

Im Modellfall einatomiger Gase geht (139) für homogene Systeme über in

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} = -\frac{1}{\tau} P_{ij} \tag{144}$$

Durch Abschätzung des einzigen Stoßintegrals (siehe (2)) läßt läßt sich in diesem Fall zeigen, daß τ die Größenordnung der mittleren Flugzeit zwischen zwei Stößen hat. Damit klingt eine Störung von P_{ij} innerhalb weniger Flugzeiten praktisch auf Null ab. Diese Abschätzung kann hier übernommen werden, da die Zusatzglieder, nämlich die Glieder herrührend von Dissoziationsstößen und von Anregungsstößen zwischen Atomen und Molekülen, die Ausgleichszeiten nicht wesentlich verändern werden. Verlangt man, daß die Strömungsvariablen im inhomogenen Fall langsam veränderlich in bezug auf die mittlere Flugzeit sind, so kann man die Lösung von (139) in Näherung als Überlagerung der Lösungen der zeitlich stark veränderlichen Gleichung (145)

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} = m_1 \left(a_{ij}^{(2)} D_3 + b_{ij}^{(2)} D_4 \right) \tag{145}$$

und der zeitlich konstanten Gleichung (146)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} P_{ij} + \frac{1}{5}\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_j} + \frac{\partial S_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial S_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) + \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_k}(P_{kj} + p\delta_{kj}) + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial x_k}(P_{ki} + p\delta_{ki}) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_e}{\partial x_k}(P_{ke} + p\delta_{ke})\delta_{ij} = m_1\left(a_{ij}^{(2)} D_3 + b_{ij}^{(2)} D_4\right) \tag{146}$$

ansehen. Die Lösung von (145) wird wegen des schnellen Abklingens vernachlässigt.

Die gleiche Abschätzung gibt für das Abklingen von S_i eine Zeitkonstante, die sich nur durch einen Faktor der Größenordnung eins von τ unterscheidet. Dementsprechend werden auch die zeitlichen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} S_i$ vernachlässigt.

Die Zeitkonstante für das Abklingen des durch Anregungsstöße erzeugten Wärmestromes $\vec{q}$ kann größer als τ werden. Die dafür maßgebenden Anregungswirkungsquerschnitte sind stark energieabhängig und zudem noch nicht sehr gut bekannt. Man kann jedoch sagen, daß, falls diese Anregungsquerschnitte sehr klein sind (tiefe Temperaturen) , auch $\vec{q}$ selbst sehr klein wird. Ist jedoch $\vec{q}$ vergleichbar mit den $S_i^{(\nu)}$, so wird sich auch die zugehörige Zeitkonstante nicht um Größenordnungen von denen der $S_i^{(\nu)}$ unterscheiden. So wird auch die zeitliche Ableitung von $\vec{q}$ vernachlässigt.

Schließlich ist noch die Diffusionsgleichung (95) zu betrachten. Für eine Abschätzung der Größenordnung von $\bar{C}_{(\eta)}^{(\eta)} m_\eta$ sei der Fall eines homogenen Systems mit $S_i^{(\nu)}$ und q_i gleich Null betrachtet.
Die Gleichung (95) vereinfacht sich dann zu:

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho \alpha (\vec{u}_\eta - \vec{u})\right) = m_\eta \tilde{C}_{(\eta)}^{(\eta)} \tag{147}$$

wobei $\tilde{C}_{(\eta)}^{(\eta)}$ nur die Glieder mit $a_\nu^{(\eta)}$ und $b_\nu^{(\eta)}$ von $\bar{C}_{(\eta)}^{(\eta)}$ enthält.

Betrachtet man andererseits eine Strömung mit

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho \alpha (\vec{u}_\eta - \vec{u})\right) = 0 ,$$

so bekommt man, wenn man Produkte kleiner Größen nach 1) vernachlässigt, aus (95) die Gleichung

$$\frac{\partial P_{ik}^{(\eta)}}{\partial x_i} - \alpha \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_i} = \bar{C}_{(\eta)k}^{(\eta)} m_\eta \tag{148}$$

Vernachlässigt man auch noch die Ableitungen der Größen $p_{ik}^{(\nu)}$ (siehe 3)), so wird daraus:

$$\frac{\partial p^{(\nu)}}{\partial x_k} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x_k} = \bar{C}_{(\nu)k}^{(\nu)} m_\nu \tag{149}$$

(149) kann man in eine andere Form bringen, um sie mit der bekannten Diffusionsgleichung für binäre Gemische zu vergleichen.

$$\frac{\partial \frac{n_1}{n_1+n_2}}{\partial x_i} + \frac{\partial \ln p}{\partial x_i}\left(\frac{n_1}{n_1+n_2} - \frac{n_1 m_1}{\rho}\right) = \frac{m_1}{p} \bar{C}_{(1)i}^{(1)} \tag{150}$$

Für ein binäres Gemisch, in dem keine Reaktionen stattfinden, hat bei Vernachlässigung der Thermodiffusion (entspricht in der hier geführten Abschätzung dem Weglassen der Terme mit $a^{(3)}$, $b^{(3)}$, $b^{(\nu,\nu)}$ in $\bar{C}_{(\nu)}^{(\nu)}$) die Diffusionsgleichung die Form (siehe z.B. (14))

$$\vec{u}_1 - \vec{u} = -\frac{(n_1+n_2)^2}{n_1 \rho} \sum m_i D_{ij} \vec{d}_j$$

$$\vec{d}_j = \frac{\partial \frac{n_j}{n_1+n_2}}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \ln p}{\partial \vec{r}}\left(\frac{n_j}{n_1+n_2} - \frac{n_j m_j}{\rho}\right) \tag{151}$$

Für ein einfaches Modell, wie es z.B. von HANSEN (12) für ein Sauerstoff-Stickstoff Gemisch durchgeführt wurde, erhält man:

$$D = D_{12} = D_{21} \approx \frac{2\eta}{\rho} \tag{152}$$

wobei η der Viskositätskoeffizient des Gemisches ist.

η hängt aber wieder mit der in (144) eingeführten Zeit τ zusammen. Vereinfacht man (139) bis auf die

NAVIER-STOKES Relation zwischen p_{ij} und dem Gradienten von $\vec{u}$, indem man die Näherungen 1) und 2) einführt,

$$S_i = 0 \qquad \text{und} \qquad p_{ik}^{(1)} = C(T,\alpha)\, p_{ik}$$

setzt, so erhält man für die Abschätzung

$$p \cdot \tau = \eta \tag{153}$$

und damit

$$D \approx \frac{2p\tau}{\rho} \tag{154}$$

Nimmt man für eine grobe Abschätzung weiterhin einmal $d_1 = d_2$ an, so bekommt man aus (150) (151) und (154):

$$d_1 = d_2 = \frac{m_1}{\rho}\, \tilde{C}_{(1)}^{(1)} = -\rho\alpha(\vec{u}_1 - \vec{u}) \cdot \frac{1}{\tau\rho}\, \frac{4}{6(1+\alpha)^2} \tag{155}$$

Nach dieser Abschätzung wird somit aus (147)

$$\frac{D}{Dt}(\rho\alpha(\vec{u}_1 - \vec{u})) \approx -\frac{1}{\tau}\rho\alpha(\vec{u}_1 - \vec{u}) \tag{156}$$

So ist auch $\frac{D}{Dt}(\rho\alpha(\vec{u}_1 - \vec{u}))$ im Rahmen der oben diskutierten Näherung zu vernachlässigen.

3.) Die dritte Näherung bezieht sich wieder auf die örtliche Variation der Zustandsvariablen. Es wird verlangt,

daß die Gradienten der in 1) als klein geforderten Größen klein von zweiter Ordnung sind. Dies ist eine Forderung, die über 1) hinausgeht und nicht unbedingt nötig ist. Für spezielle Fälle könnte man auf diese Näherung verzichten. Die sich ergebenden Gleichungen werden jedoch wegen ihrer Kompliziertheit im allgemeinen unbrauchbar sein. Sie stellen zudem eine höhere Näherung hydrodynamischer Gleichungen als die NAVIER-STOKES Gleichnungen dar.

Führt man die Näherungen 1) 2) und 3) und den Ausdruck (143) für die rechten Seiten in die Gleichungen (139) und (140) ein, so erhält man die NAVIER-STOKES beziehungen für den vorliegenden Fall:

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial x_e}\delta_{ij} = \frac{(1+\alpha)\rho}{2}\left(P_{ij}^{(1)}\left(\frac{D_3}{m_1} - \frac{D_4}{m_1}\right) + P_{ij}\frac{D_4}{m_2}\right) \quad (157)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial x_e}\delta_{ij} = \alpha\rho\left(P_{ij}^{(1)}\left(\frac{C_3}{m_1} - \frac{C_4}{n_2}\right) + P_{ij}\frac{C_4}{n_2}\right) \quad (158)$$

Löst man (157) und (158) nach P_{ij} bzw. $P_{ij}^{(1)}$ auf, so ergibt sich:

$$P_{ij} = -\mu\left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\delta_{ij}\right) \quad (159)$$

$$P_{ij}^{(1)} = -\mu_1\left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\delta_{ij}\right) \quad (160)$$

mit

$$\mu = \frac{1}{m_1}\,\frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)}\,\frac{\frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{1-\alpha}{2}D_3 - \alpha D_4\right) - \alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}C_3 - \alpha C_4\right)}{D_4\left(\frac{1-\alpha}{2}C_3 - \alpha C_4\right) + C_4\left(\frac{1-\alpha}{2}D_3 - \alpha D_4\right)} \quad (161)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{m_1}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,\frac{\alpha C_4 - \frac{1+\alpha}{2} D_4}{D_4\left(\frac{1-\alpha}{2} C_3 - \alpha C_4\right) + C_4\left(\frac{1-\alpha}{2} D_3 - \alpha D_4\right)} \qquad (162)$$

Bei oberflächlichem Hinsehen vermißt man an dieser Stelle das Auftreten des zweiten Viskositätskoeffizienten. Tatsächlich gibt der zweite Viskositätskoeffizient jedoch nur Beiträge zum Diagonalanteil von P_{ij} . Wegen der hier vorgenommenen speziellen Zerlegung von P_{ij} in p_{ij} und p enthält der Ausdruck für p_{ij} diesen Anteil nicht.

Bekanntlich ist das Auftreten eines zweiten Viskositätskoeffizienten immer gekoppelt mit Relaxationserscheinungen zwischen innerer und Translationstemperatur. Dies zeigt sich in dem hier behandelten Lösungsverfahren besonders deutlich. Üblicherweise wird bei der Zerlegung von P_{ij} von einem Diagonalterm $p_0 = (1+\alpha)\rho R_2 T$ anstelle von p ausgegangen. Dies muß man auch hier schließlich tun, da ja T als die "Temperatur" des Gases auch für die Berechnung aller Koeffizienten zugrunde gelegt wird. Man erhält dann:

$$p = p_0 (1 + \Delta\vartheta) \qquad p_0 = (n_1 + n_2) m_1 R_1 T$$

$$p^{(1)} = p_0^{(1)} (1 + \Delta\vartheta) \qquad p_0^{(1)} = n_1 m_1 R_1 T \qquad (163)$$

Im Temperaturgleichgewicht tritt also kein zweiter Viskositätskoeffizient auf. Inwieweit der Anteil $p_0^{(2)} \Delta\vartheta$ von $p^{(2)}$ als proportional der Divergenz der Strömungsgeschwindigkeit angesehen werden kann, wird weiter unten bei der Behandlung der Gleichung für die innere Temperatur gezeigt.

Nun werden die Gleichungen für die Wärmeströme S_i , $S_i^{(1)}$, q_i durch die Näherungen 1) - 3) vereinfacht. Aus den Gleichungen (104) , (105) und (109) entstehen so die neuen Gleichungen:

$$-\frac{5p}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{5}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(R_1\vartheta(p+p^{(1)})\right)=m_1\left(\bar{C}_{(1)}^{(3)}+2\bar{C}_{(2)}^{(3)}\right)_{iij} \qquad (164)$$

$$-\frac{5p^{(1)}}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+5\frac{\partial(R_1\vartheta p^{(1)})}{\partial x_i}=m_1\bar{C}_{(1)\,iij}^{(3)} \qquad (165)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}(n_2\bar{\varepsilon})+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(R_1\vartheta n_2\bar{\varepsilon})=\bar{C}_{(2)\,i}^{(1,1)} \qquad (166)$$

Hinzu kommt noch die Diffusionsgleichung, die durch die diskutierten Vereinfachungen aus (95) entsteht.

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i}-\alpha\frac{\partial p}{\partial x_i}=m_1\bar{C}_{(1)\,i}^{(1)} \qquad (167)$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (164) - (167) enthalten Terme mit $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $a^{(3)}$, $b^{(3)}$ und $b^{(1,1)}$.

Mit Hilfe der Definitionsgleichungen (20) - (22) , (56) , (58) , (76) , (78) und (80) ersetzt man die Koeffizienten $a^{(\nu)}$, $b^{(\nu)}$ durch die hydrodynamischen Größen $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{S}$, $\vec{S}^{(1)}$, $\vec{q}$. Zwischen $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ besteht die spezielle Beziehung:

$$\vec{u}_2-\vec{u}=-\frac{\alpha}{1-\alpha}\vec{u}_1-\vec{u} \qquad (168)$$

Da die Koeffizienten $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$ nur die Differenzen $\vec{u}_1 - \vec{u}$ und $\vec{u}_2 - \vec{u}$ enthalten, treten als Folge von (168) statt der ursprünglichen fünf Variablen $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $a^{(3)}$, $b^{(3)}$, $b^{(3,1)}$ nur die vier hydrodynamischen Variablen $\vec{u}_1 - \vec{u}$, $\vec{S}$, $\vec{S}^{(1)}$, $\vec{q}$ auf.

Damit sind die vier Gleichungen (164) - (167) auch nach diesen Größen auflösbar.

Schreibt man die rechten Seiten $\bar{C}_{(\mu)}^{(\nu)}$ in den hydrodynamischen Variablen, so haben die Gleichungen (164) - (167) die Gestalt:

$$-\frac{5p}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \vec{r}} + \frac{5}{2}\frac{\partial (R_1 \vartheta (p+p^{(1)}))}{\partial \vec{r}} = \frac{m_1}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big[(E_1 - 5E_3 - \frac{\alpha \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha}(E_2 - 5E_4 - E_5))\cdot(\vec{u}_1 - \vec{u}) + \frac{\vec{S}^{(1)}}{\rho R_1 \vartheta}\left(\frac{E_3}{\alpha} - \frac{E_4 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{1-\alpha}\right) + \frac{\vec{q}\, 2^{\frac{1}{2}} \cdot E_5}{n_2 \bar{\varepsilon}}\Big] \quad (169)$$

$$-\frac{5p^{(1)}}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \vec{r}} + 5\frac{\partial (R_1 \vartheta p^{(1)})}{\partial \vec{r}} = \frac{m_1}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big[(E_1 - 5E_3 - \frac{\alpha \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha}(E_2 - 5E_4 - E_5))\cdot(\vec{u}_1 - \vec{u}) + \frac{\vec{S}^{(1)}}{\rho R_1 \vartheta}\left(\frac{E_3}{\alpha} - \frac{E_4 2^{\frac{3}{2}}}{1-\alpha}\right) + \frac{\vec{S} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot E_4}{\rho R_1 \vartheta (1-\alpha)} + \frac{\vec{q} \cdot 2^{\frac{1}{2}} E_5}{n_2 \bar{\varepsilon}}\Big] \quad (170)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \vec{r}}(n_2\bar{\varepsilon}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(R_1 \vartheta n_2 \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big[(G_1 - 5G_3 - \frac{\alpha \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha}(G_2 - 5G_4 - G_5))\cdot(\vec{u}_1 - \vec{u}) + \frac{\vec{S}^{(1)}}{\rho R_1 \vartheta}\left(\frac{G_3}{\alpha} - \frac{G_4 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{1-\alpha}\right) + \frac{\vec{S} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot G_4}{\rho R_1 \vartheta (1-\alpha)} + \frac{\vec{q} \cdot 2^{\frac{1}{2}} G_5}{n_2 \bar{\varepsilon}}\Big] \quad (171)$$

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \vec{r}} - \alpha \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} = \frac{m_1}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big[(B_1 - 5B_3 - \frac{\alpha \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha}(B_2 - 5B_4 - B_5))\cdot(\vec{u}_1 - \vec{u}) + \frac{\vec{S}^{(1)}}{\rho R_1 \vartheta}\left(\frac{B_3}{\alpha} - \frac{B_4 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{1-\alpha}\right) + \frac{\vec{S} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot B_4}{\rho R_1 \vartheta (1-\alpha)} + \frac{\vec{q} \cdot 2^{\frac{1}{2}} B_5}{n_2 \bar{\varepsilon}}\Big] \quad (172)$$

Die Gleichungen (169) - (172) ergeben aufgelöst nach den

$$\vec{u}_1 - \vec{u}, \quad \vec{S}^{(1)}, \quad \vec{S}, \quad \vec{q}$$

die gesuchten NAVIER-STOKES Beziehungen des Problems. Um die Auflösung zu erleichtern, seien die folgenden Abkürzungen definiert:

$$\begin{aligned}
&-\frac{5\rho}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \vec{r}} + \frac{5}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(R_1\vartheta(\rho - \rho^{(1)})) - \vec{f}_1 \\
&-\frac{5\rho^{(1)}}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}} + 5\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(R_1\vartheta\rho^{(1)}) - \vec{f}_2 \\
&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \vec{r}}(n_2\vec{\varepsilon}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(R_1\vartheta n_2\vec{\varepsilon}) - \vec{f}_3 \\
&\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \vec{r}} - \alpha\frac{\partial p}{\partial \vec{r}} = \vec{f}_4
\end{aligned} \tag{173}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{m_1}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(F_1 - 5F_3 - \frac{\alpha\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha}(F_2 - 5F_4 - F_5)\right) = g_{11} \\
&\frac{m_1}{\rho(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{F_3}{\alpha} - \frac{F_4\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha}\right) = g_{12} \\
&\frac{m_1}{\rho(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{2^{\frac{1}{2}}F_4}{1-\alpha} = g_{13} \\
&\frac{m_1}{\rho(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{2^{\frac{1}{2}}}{n_2\bar{\varepsilon}}F_5 = g_{14}
\end{aligned} \tag{174}$$

Ersetzt man in den Gleichungen (174) die Koeffizienten F_ν nacheinander durch E_ν , G_ν , B_ν, so sind die $g_{\nu\beta}$ durch $g_{2\beta}$, $g_{3\beta}$ und $g_{4\beta}$ zu ersetzen.

Die Gleichungen (169) - (172) schreiben sich mit den oben eingeführten Abkürzungen:

$$\vec{f_\nu} = g_{\nu 1}(\vec{u_1}-\vec{u}) + g_{\nu 2}\vec{S}^{(1)} + g_{\nu 3}\vec{S} + g_{\nu 4}\vec{q} \qquad (175)$$

Die Auflösung von (175) ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{u_1}-\vec{u} &= \Delta_{1\nu}\vec{f_\nu} \\ \vec{S}^{(1)} &= \Delta_{2\nu}\vec{f_\nu} \\ \vec{S} &= \Delta_{3\nu}\vec{f} \\ \vec{q} &= \Delta_{4\nu}\vec{f} \end{aligned} \qquad (176)$$

Die Koeffizienten $\Delta_{\mu\nu}$ sind nur Funktionen von T, ρ und α . Sie berechnen sich nach der KRAMERschen Regel durch Division der Unterdeterminanten der Hauptdeterminanten Δ mit Δ selbst.

$$\Delta_{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu}\frac{\Delta^{(\mu,\nu)}}{\Delta} \qquad (177)$$

$$\Delta = |g_{\mu\nu}|$$

$\Delta^{(\mu,\nu)}$ = Unterdeterminante von Δ , die durch Streichen der ν -ten Zeile und der μ -ten Spalte entsteht.

Die Größen $\vec{f_\nu}$ kann man noch etwas umformen, um sie der üblichen Schreibweise der Wärmestrom- und Diffusionsgleichungen einatomiger Gasgemische anzupassen. Allerdings kann man im allgemeinen Fall die $\vec{f_\nu}$ nicht einfach als Gradienten der Temperaturen ϑ , θ , T und des Dissoziationsgrades α schreiben. Dies ist nur möglich für die drei Spezialfälle, deren Gleichungen man aus (173) leicht herleiten kann, nämlich einatomiges Gas, mehratomiges, anregbares Gas und nichtreagierendes Gasgemisch. Für den allgemeinen Fall führt man zweckmäßig ein:

Die kinetische Energie pro Masseneinheit

$$e_{kin} = \frac{3}{2}\frac{\rho}{\varrho} \tag{178}$$

die Energie der inneren Freiheitsgrade pro Masseneinheit

$$\epsilon^* = \frac{\bar{\epsilon}}{2m_1}$$

Weiterhin tritt der Gradient einer willkürlich wählbaren konzentrationsgröße auf. Man wählt im allgemeinen als Konzentration die Teilchenkonzentration der Atome

$$\frac{n_1}{n} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$$

Neben den definierten Größen tritt in den $\vec{f_\nu}$ noch der Gradient des Druckes auf.

Die $\vec{f_\nu}$ kann man mit Hilfe der oben definierten Größen umformen in:

$$\vec{f}_1 = \frac{5}{4}(R_1\vartheta)^2_S\left[\alpha(1-\alpha)\frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} + (1+3\alpha)\frac{\partial \log e_{kin}}{\partial \vec{r}} + \alpha(1-3\alpha)\frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}}\right]$$

$$\vec{f}_2 = \frac{5}{2}(R_1\vartheta)^2_S\left[\alpha(1-\alpha)\frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} + 2\alpha\frac{\partial \log e_{kin}}{\partial \vec{r}} + 2\alpha(1-\alpha)\frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}}\right] \quad (179)$$

$$\vec{f}_3 = \frac{1}{2}R_1\vartheta_S\varepsilon^*\left[\alpha(1-\alpha)\frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} + (1-\alpha)\frac{\partial \log \varepsilon^*}{\partial \vec{r}} - 2\alpha\frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}}\right]$$

$$\vec{f}_4 = \frac{1}{2}R_1\vartheta_S\left[\alpha(1-\alpha)\frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} + 2\alpha\frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}}\right]$$

Die Lösung (176) des Systems (175) kann man mit (179) auch zusammenfassend in eine Form bringen, die genau der üblichen Schreibweise der NAVIER-STOKES Relationen für die verschiedenen Spezialfälle entspricht:

$$\vec{u}_1 - \vec{u} = -(1-\alpha^2)\frac{D_{1p}}{2}\frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} - D_{1\vartheta}\frac{\partial \log e_{kin}}{\partial \vec{r}} - D_{1\Theta}\cdot\frac{\log \varepsilon^*}{\partial \vec{r}} - (1+\alpha)D_{12}\frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}} \quad (180)$$

$$\vec{S}^{(1)} = -\lambda_p^{(1)}\frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} - \lambda_\vartheta^{(1)}\cdot\vartheta\frac{\partial \log e_{kin}}{\partial \vec{r}} - \lambda_\Theta^{(1)}\cdot\Theta\frac{\partial \log \varepsilon^*}{\partial \vec{r}} - \lambda_{12}^{(1)}\frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}} \quad (181)$$

$$\vec{S} = -\lambda_p\frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} - \lambda_\vartheta\cdot\vartheta\frac{\partial \log e_{kin}}{\partial \vec{r}} - \lambda_\Theta\cdot\Theta\frac{\partial \log \varepsilon^*}{\partial \vec{r}} - \lambda_{12}\frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}} \quad (182)$$

$$\vec{q} = -\lambda_p^{(q)}\frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} - \lambda_\vartheta^{(q)}\cdot\vartheta\frac{\partial \log e_{kin}}{\partial \vec{r}} - \lambda_\Theta^{(q)}\cdot\Theta\frac{\partial \log \varepsilon^*}{\partial \vec{r}} - \lambda_{12}^{(q)}\frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}} \quad (183)$$

Bei dieser Schreibweise entspricht D_{12} dem gewöhnlichen binären Diffusionskoeffizienten und die Koeffizienten λ_c und λ_θ den üblichen Wärmeleitungskoeffizienten.

Es ist zu vermuten, daß nicht alle Koeffizienten in (180) - (183) von gleicher Größenordnung sind. Z.B. weiß man aus dem Experiment, daß der Thermodiffusionskoeffizient im allgemeinen zu vernachlässigen ist gegen den gewöhnlichen Diffusionskoeffizienten. Somit ist zu vermuten, daß auch $D_{1\vartheta}$ und $D_{1\theta}$ sehr viel kleiner als D_{12} sind. Eine Abschätzung der Größenordnungen vermittels der expliziten Zusammensetzung der Koeffizienten aus speziellen Stoßintegralen ist möglich, soll hier aber nicht durchgeführt werden.

Die Koeffizienten D und λ sind nach (176) (179) und (180) - (183) Linearkombinationen der $\Delta_{\mu\nu}$ mit Faktoren, die wiederum nur α , ϑ , θ , ϱ enthalten. Dabei sind ϑ und θ im Sinne der bisherigen Näherungen durch T zu ersetzen, da bei einer Entwicklung um T Terme mit $\Delta\vartheta$ und $\Delta\theta$ wegen der Multiplikation mit einem Gradienten nach 1) als klein von zweiter Ordnung anzusehen sind.

Die Gleichung (181) für $\vec{S}^{(1)}$ ist ebenso wie die Gleichung (160) für $p_{ij}^{(1)}$ überflüssig, da $\vec{S}^{(1)}$ und $p_{ij}^{(1)}$ in den Erhaltungssätzen nicht auftreten und auch vom Standpunkt der Hydrodynamik keine Zustandsgrößen sind.

Nun bleiben noch die beiden Gleichungen (93) und (106) für den Dissoziationsgrad α und die innere Energie $n_2\bar{\varepsilon}$.

Beide Gleichungen werden nicht weiter vereinfacht:

$$\varrho \frac{D\alpha}{Dt} + \frac{\partial \varrho \alpha (\vec{u}_1 - \vec{u})}{\partial \vec{r}} = m_1 A_1 (1 + a_1 \Delta\vartheta + a_2 \Delta\theta) \tag{184}$$

$$\frac{D}{Dt}(n_2 \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial u_k}{\partial x_k}(n_2 \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = -\frac{3}{2} m_1 \lambda_1 (1 + d_1 \Delta\vartheta + d_2 \Delta\theta) +$$

$$- \frac{E_0}{2} A_1 (1 + a_1 \Delta\vartheta + a_2 \Delta\theta) \tag{185}$$

$\Delta\vartheta$ wird nach (125) durch $\Delta\theta$ ersetzt. Benutzt man außerdem die Beziehung $n_2 \bar{\varepsilon} = (1-\alpha)\varrho \varepsilon^*$ und die Kontinuitätsgleichung, so folgt:

$$\varrho \frac{D\alpha}{Dt} + \frac{\partial \alpha \varrho (\vec{u}_1 - \vec{u})}{\partial \vec{r}} = K_1 + K_2 \Delta\theta \tag{186}$$

$$\varrho \frac{D}{Dt}[(1-\alpha)\varepsilon^*] + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{r}} = K_3 + K_4 \Delta\theta \tag{187}$$

mit

$$\begin{aligned} K_1 &= m_1 A_1 \\ K_2 &= m_1 A_1 \left(a_2 - a_3 \frac{2}{3} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{C_\theta}{R_2}\right) \\ K_3 &= -\left(\frac{3}{2} m_1 \lambda_1 + \frac{E_0}{2} A_1\right) \\ K_4 &= -\frac{3}{2} m_1 \lambda_1 \left(d_2 - d_1 \frac{2}{3} \frac{(1-\alpha)C_\theta}{(1+\alpha)R_2}\right) - \\ &\quad - \frac{E_0}{2} A_1 \left(a_2 - a_1 \frac{2}{3} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{C_\theta}{R_2}\right) \end{aligned} \tag{188}$$

Es wurde früher erwähnt, daß unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen der Anteil $p_0 \Delta\vartheta$ von p durch einen zweiten Viskositätskoeffizienten beschreibbar ist. Dazu wird die Gleichung (187) weiter vereinfacht.

Mit Hilfe von (186) und der Beziehung zwischen ε^* und Θ kann man (187) auch schreiben:

$$\begin{aligned} \varrho(1-\alpha)c_\Theta \frac{D\Theta}{Dt} + \varepsilon^* \frac{\partial \alpha\varrho(\vec{u}_1-\vec{u})}{\partial \vec{r}} &= k_3 + \varepsilon^* k_1 + \\ &+ (k_4 + \varepsilon^* k_2)\Delta\Theta \end{aligned} \tag{189}$$

Das Ziel ist, aus (189) eine Gleichung zu machen, die als totale zeitliche Ableitung $\frac{D}{Dt}\Delta\Theta$ enthält.
Es gilt

$$\frac{D}{Dt}\Delta\Theta = \frac{1}{T}\frac{D(\Theta-T)}{Dt} - \frac{\Delta\Theta}{T}\frac{DT}{Dt} \tag{190}$$

In der Energiegleichung (31) kann man die Ableitung der Energie nach (120) ersetzen durch die Ableitungen von Temperatur und Dissoziationsgrad. Unter Verwendung von Gleichung (186) für $\frac{D}{Dt}\alpha$ kann man die Energiegleichung dann schreiben:

$$\begin{aligned} \varrho c_v \frac{DT}{Dt} - c_\alpha \frac{\partial \alpha\varrho(\vec{u}_1-\vec{u})}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{1}{2}\vec{S} + \vec{q} + \rho\alpha\varepsilon_0^*(\vec{u}_1-\vec{u})\right) + \\ + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} P_{ki} = -c_\alpha k_1 - c_\alpha k_2 \Delta\Theta \end{aligned} \tag{191}$$

Durch Kombination von (189) und (190) folgt:

$$\varrho \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta + \left(\frac{\varepsilon^*}{(1-\alpha) c_\theta} + \frac{c_\alpha}{c_v} + \frac{\Delta\theta\, c_\alpha}{c_v} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial p_\alpha (\vec{u}_1 - \vec{u})}{\partial \vec{r}} +$$

$$+ \frac{1}{T(1-\alpha) c_\theta} \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{T c_v} (1+\Delta\theta) \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{1}{2} \vec{S} + \vec{q} + p_\alpha (\vec{u}_1 - \vec{u}) \varepsilon^* \right) - \tag{192}$$

$$- \frac{1}{T c_v} (1+\Delta\theta) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} P_{ki} = \frac{1}{(1-\alpha) c_\theta T} \left[k_3 + \varepsilon^* k_1 + (k_4 + \varepsilon^* k_2) \Delta\theta \right] +$$

$$+ \frac{c_\alpha}{T c_v} (1+\Delta\theta)(k_1 + k_2 \Delta\theta)$$

$$\stackrel{\text{def.}}{=} k_5 + k_6 \Delta\theta + k_7 \Delta\theta^2$$

Nimmt man jetzt an, daß der Ausgleich der inneren Temperatur leicht erfolgt, d.h. daß die Anregungswirkungsquerschnitte groß sind, so kann man die Argumentation für die Näherung 2) auch hier anwenden und $\frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta$ vernachlässigen. Mit Näherung 1) und 3) entsteht dann aus Gleichung (192) :

$$- \frac{p_0}{T c_v} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = k_5 + k_6 \Delta\theta \tag{193}$$

oder mit (125)

$$p_0 \Delta\vartheta = - \varkappa_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \varkappa_1 \tag{194}$$

Dabei ist

$$\varkappa_0 = - \frac{2}{3} (1-\alpha)^2 c_\theta^2 T \rho_0 \frac{1}{c_v (k_4 + \varepsilon^* k_2) + c_\alpha c_\theta (1-\alpha)(k_1 + k_2)}$$

$$\varkappa_1 = - \frac{2}{3} (1-\alpha) c_\theta T \frac{c_v (k_3 + \varepsilon^* k_1) + c_\alpha c_\theta (1-\alpha)\, k_1}{c_v (k_4 + \varepsilon^* k_2) + c_\alpha c_\theta (1-\alpha)(k_1 + k_2)} \tag{195}$$

Im Falle des nichtdissoziierenden, anregbaren Gases wird $\varkappa_1 = 0$ (siehe (7)). $\varkappa_0$ ist der sogenannte zweite Viskositätskoeffizient. Die Gleichung (194) ersetzt im Falle der leichten Austauschbarkeit von Anregungs- und Translationstemperatur die Gleichung (187) .

Die hier gefundenen hydrodynamischen Gleichungen kann man noch verbessern indem man die Näherung 3) fallen läßt. Statt die Gradienten der kleinen Größen p_{ik} , $\vec{S}$ etc. zu vernachlässigen, wird ein Iterationsverfahren angewendet. In nulter Näherung werden die Gradienten vernachlässigt. Für die erste Näherung werden die p_{ik} , $\vec{S}$ etc., wenn sie als Gradient eingehen, durch die nullte Näherung ersetzt. Die entstehenden Gleichungen werden nicht aufgeführt, da sie leicht herzuleiten sind, dabei aber so kompliziert werden, daß sie höchstens in Spezialfällen lösbar sind.

§ VII Zusammenfassung

In den vorhergehenden Kapiteln wurde ausgehend von den BOLTZMANN-Gleichungen für ein dissoziierendes Gas ein Gleichungssystem für die hydrodynamischen Zustandsvariablen des Problems hergeleitet. Die Näherung entspricht den NAVIER-STOKES Gleichungen für einatomige Gase. Das resultierende Gleichungssystem sei hier nocheinmal zusammengefaßt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{196}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{197}$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{1}{2} \vec{S} + \vec{q} + E_0^* \rho \alpha (\vec{u}_1 - \vec{u}) \right) + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} P_{ki} = 0 \tag{198}$$

$$\rho \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\rho \alpha (\vec{u}_1 - \vec{u})) = k_1 + k_2 \Delta \theta \tag{199}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} [(1-\alpha) \varepsilon^*] + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{r}} = k_3 + k_4 \Delta \theta \tag{200}$$

$$P_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_e}{\partial x_e} \delta_{ij} \right) \tag{201}$$

$$\vec{u}_1 - \vec{u} = -\frac{1-\alpha^2}{2} D_{1p} \frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} - D_{1\vartheta} \frac{\partial \log \varepsilon_{kin}}{\partial \vec{r}} - D_{10} \frac{\partial \log \varepsilon^*}{\partial \vec{r}} - (1+\alpha) D_{12} \frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}} \tag{202}$$

$$\vec{S} = -\lambda_p \frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} - \lambda_\vartheta \cdot \vartheta \frac{\partial \log e_{kin}}{\partial \vec{r}} - \lambda_\theta \cdot \theta \frac{\partial \log \varepsilon^*}{\partial \vec{r}} - \lambda_{12} \frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}} \tag{203}$$

$$\vec{q} = -\lambda_p^{(q)} \frac{\partial \log p}{\partial \vec{r}} - \lambda_\vartheta^{(q)} \cdot \vartheta \frac{\partial \log e_{kin}}{\partial \vec{r}} - \lambda_\theta^{(q)} \cdot \theta \frac{\partial \log \varepsilon^*}{\partial \vec{r}} - \lambda_{12}^{(q)} \frac{\partial \log \frac{2\alpha}{1+\alpha}}{\partial \vec{r}} \tag{204}$$

$$e = e_{kin} + (1-\alpha)\varepsilon^* + \alpha E_0^* \quad , \quad \varepsilon^* = \int_0^\theta c_\theta \, d\theta, \quad e_{kin} = \frac{3}{2}\frac{p}{\rho}$$

$$p = p_0 (1 + \Delta\vartheta) \quad , \quad p_0 = (1+\alpha)\rho R_2 T$$

$$\Delta\vartheta = -\frac{2(1-\alpha)c_\theta}{3(1+\alpha)R_2} \Delta\theta \tag{205}$$

Für den Fall, daß die Anregung der inneren Freiheitsgrade leicht ist, kann man Gleichung (200) ersetzen durch:

$$p_0 \Delta\vartheta = -\varkappa_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \varkappa_1 \tag{206}$$

Die Koeffizienten k , μ , λ , ϑ , $\varkappa$ sind im allgemeinen Funktionen von T , α , ρ .

Das obige Gleichungssystem enthält verschiedene Spezialfälle:

1.) Das einatomige Gas für :

$\alpha = 1$, $\theta = \vartheta = T$ und $\sigma_{11} \neq 0$, dagegen alle anderen $\sigma = 0$, $\varepsilon^* = E_0^* = 0$

Es entfallen dadurch die Gleichungen (199) und (200) für

α und ε^* . In der Energiegleichung bleibt als Wärmestrom nur $\vec{S}$ stehen, der von Transport kinetischer Energie der Atome herrührt. Dementsprechend entfällt auch Gleichung (202) und Gleichung (205) .

2.) Das mehratomige, anregbare Gas für :

$$\alpha = 0\,,\ \theta \neq \vartheta\,,\ \sigma_{22} \neq 0\,,$$ alle anderen

$\sigma = 0$. Hier entfallen die Gleichungen (199) und (202) .

3.) Das Gemisch nichtreagierender Atome und Moleküle für :

$$\alpha = \text{const}\,,\ \theta \neq \vartheta\,,\ \sigma_{11}^{12'} = \sigma_{12}^{22'} = 0\,,\ E_j^* = 0$$

Wiederum entfällt die Gleichung (199) .

4.) Das chemische Gleichgewicht:

Im chemischen und Temperaturgleichgewicht ist die Gleichung (199) zu ersetzen durch das Massenwirkungsgesetz (135) . Im Falle des Temperaturnichtgleichgewichtes ist das einfache Massenwirkungsgesetz (135) in der in § V angedeuteten Weise zu erweitern.

§ VIII Ausblick

Die hergeleiteten allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen (170) - (179) enthalten Koeffizienten, die, wie im Anhang gezeigt wird, bei Kenntnis der Wirkungsquerschnitte berechenbar sind. Allerdings dürfte der Rechenaufwand beträchtlich sein, wenn die Wirkungsquerschnitte in komplizierter Weise von den Stoßparametern abhängen. Um den Einfluss der Dissoziation auf die verschiedenen Transportkoeffizienten abzuschätzen, sollte man deshalb $\sigma_{111}^{12'}$ und $\sigma_{112}^{22'}$ als konstant ansetzen, sobald die Stoßenergie eine Schwelle überschreitet, darunter gleich Null. Dann lassen sich die Integrale I_{β}^{α} und damit die Koeffizienten leicht auswerten. Die Ergebnisse dieser Näherung sollen in einer späteren Arbeit diskutiert werden.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. G. LUDWIG, möchte ich an dieser Stelle für die Ermöglichung dieser Arbeit herzlich danken.

A n h a n g

Berechnung der Stoßintegrale

Bevor wir uns der eigentlichen Berechnung der Stoßintegrale zuwenden, seien hier einige immer wieder benutzte Formeln für die Berechnung gewisser Integrale angegeben.

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2a}} x^{2n}\, dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}} a^{n+\frac{1}{2}} \frac{(2n-1)!}{2^n (n-1)!} \qquad \text{(A 1)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2a}} \vec{x}^{2n}\, d\vec{x} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} a^{n+\frac{3}{2}} \vec{\delta}^{n} \qquad \text{(A 2)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a}} x^{2n} \vec{x}^{2m}\, d\vec{x} = \qquad \text{(A 3)}$$

$$= (2\pi)^{\frac{3}{2}} a^{n+m+\frac{3}{2}} \frac{(2m+2n+1)!\; m!}{2^n (m+n)!\,(2m+1)!} \vec{\delta}^{m}$$

Die weniger bekannten Formeln (A 2) und (A 3) kann man z.B. aus dem Anhang von (2) entnehmen.

Für die Berechnung der Stoßintegrale I_β^α ist es sinnvoll, vom Laborsystem ins Schwerpunktssystem überzugehen. Es lassen sich dann die Integrationen über alle Variablen mit Ausnahme der Relativgeschwindigkeitsbeträge und der Winkel zwischen den Relativgeschwindigkeiten vor und nach dem Stoß leicht ausführen.

Es werden die Schwerpunktsgeschwindigkeiten vor dem Stoß mit $\vec{G}$, nach dem Stoß mit $\vec{G}'$ bezeichnet, ent-

sprechend die Relativgeschwindigkeiten mit $\vec{g}$ bzw. $\vec{g}'$
Falls mehrere Relativgeschwindigkeiten eingeführt werden (bei Dissoziationsstößen) werden die $\vec{g}$ mit Indizes $\nu = (1,2)$ versehen. Da eine Verwechslung wegen der getrennten Behandlung der einzelnen Integrale kaum möglich ist, wird diese Bezeichnung für alle Integrale verwendet, obwohl der Zusammenhang mit den Laborgeschwindigkeiten in jedem Fall ein anderer ist.

a) Berechnung von $I_{11}(\psi)$ und $I_{22}(\psi)$

Es seien zuerst die Integrale $I_{11}(\psi)$ und $I_{22}(\psi)$ betrachtet, die sich teilweise gemeinsam behandeln lassen. Sie unterscheiden sich ausschließlich durch die Möglichkeit in $I_{22}(\psi)$, auch Energie mit den inneren Freiheitsgraden auszutauschen.

Wegen der Symmetrie von σ_{11} in den Integrationsvariablen gilt für $I_{11}(\psi)$ die bekannte Symmetrierelation:

$$I_{11}(\psi) = \int \psi (f_1' \bar{f}_1' - f_1 \bar{f}_1) \sigma_{11} \, d\vec{\xi}_1 \, d\vec{\bar{\xi}}_1 \, d\vec{\xi}_1' \, d\vec{\bar{\xi}}_1' =$$

$$= \frac{1}{2} \int (\bar{\psi}' + \psi' - \psi - \bar{\psi}) f_1 \bar{f}_1 \, d\vec{\xi}_1 \, d\vec{\bar{\xi}}_1 \, d\vec{\xi}_1' \, d\vec{\bar{\xi}}_1' \, \sigma_{11} = \tag{A 4}$$

$$\overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \int [\psi'] f_1 \bar{f}_1 \sigma_{11} \, d\vec{\xi}_1 \, d\vec{\bar{\xi}}_1 \, d\vec{\xi}_1' \, d\vec{\bar{\xi}}_1'$$

Ebenso gilt für $I_{22}(\psi)$

$$I_{22}(\psi) = \sum_{ijke} \int \psi (f_{2k}' \bar{f}_{2e}' - f_{2i} \bar{f}_{2j}) \sigma_{22} \, d\vec{\xi}_2 \, d\vec{\bar{\xi}}_2 \, d\vec{\xi}_2' \, d\vec{\bar{\xi}}_2'$$

$$= \sum_{ijke} \int [\psi'] f_{2i} \bar{f}_{2j} \sigma_{22} \, d\vec{\xi}_2 \, d\vec{\bar{\xi}}_2 \, d\vec{\xi}_2' \, d\vec{\bar{\xi}}_2' \tag{A 5}$$

Diese Beziehungen erleichtern die Berechnung von I_{11}

und I_{22} beträchtlich.

Jetzt werden Schwerpunktskoordinaten eingeführt. Dies kann man für beide Integrale gemeinsam tun. Die Koordinatenbeziehungen unterscheiden sich nur durch den Index $\nu = (1,2)$ an den Geschwindigkeiten.
Es gilt

$$\vec{G} = \frac{1}{2}(\vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2) \qquad \vec{g} = \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2$$

$$\vec{G}' = \frac{1}{2}(\vec{\xi}_1' + \vec{\xi}_2') \qquad \vec{g}' = \vec{\xi}_1' - \vec{\xi}_2' \qquad \text{(A 6)}$$

und die Umkehr:

$$\vec{\xi}_1 = \vec{G} + \frac{1}{2}\vec{g} \qquad \vec{\xi}_1' = \vec{G}' + \frac{1}{2}\vec{g}'$$

$$\vec{\xi}_2 = \vec{G} - \frac{1}{2}\vec{g} \qquad \vec{\xi}_2' = \vec{G}' - \frac{1}{2}\vec{g}' \qquad \text{(A 7)}$$

Der Betrag der Funktionaldeterminante der Transformation ist 1 .
Außerdem gilt der Impulssatz:

$$\vec{G} = \vec{G}' \qquad \text{(A 8)}$$

und der Energiesatz (wobei der Impulssatz bereits eingesetzt wurde):

$$g^2 = g'^2 \qquad \text{für } I_{11}(4) \qquad \text{(A 9)}$$

$$g^2 = g'^2 + \frac{2}{m_1}(\varepsilon_k' + \bar{\varepsilon}_e' - \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_j) \overset{\text{def.}}{=} g'^2 + \frac{2}{m_1}[\varepsilon']$$

$$\text{für } I_{22}(4) \qquad \text{(A 10)}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten σ_{11} und σ_{22} müssen den Energie- und Impulssatz als δ -Funktionen enthalten. Man kann also schreiben

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{*}(g,\varphi)\,\delta(\vec{E}-\vec{E}')\,\delta(g^2-g'^2) \qquad \text{(A 11)}$$

und

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^{*}(g,\varphi)\,\delta(\vec{E}-\vec{E}')\,\delta\left(g^2-g'^2-\frac{2}{m_1}[E-E']\right) \qquad \text{(A 12)}$$

σ_{11}^{*} bzw. σ_{22}^{*} können wegen der Translationsinvarianz und weil keine Raumrichtung ausgezeichnet sein soll (keine äußeren Kräfte) nur noch von g und dem Winkel φ zwischen $\vec{g}$ und $\vec{g}'$ abhängen.

Führt man die Integration über $\vec{E}'$ und g' aus, so erhält man:

$$I_{11}(\psi) = \int \psi\,(f_1' f_1'' - f_1 f_1)\,\sigma_{11}\,d\vec{E}\,d\vec{E}'\,d\vec{g}\,d\vec{g}' =$$

$$= \int \psi\,(f_1' f_1'' - f_1 f_1)\,g\,\alpha_{11}(g,\varphi)\,d\vec{E}\,d\vec{g}\,d\omega$$

(A 13)

$$I_{22}(\psi) = \sum_{ijke} \int \psi\,(f_{2k}' f_{2e}'' - f_{2i} f_{2j})\,\sigma_{22}\,d\vec{E}\,d\vec{E}'\,d\vec{g}\,d\vec{g}'$$

$$= \sum_{ijke} \int \psi\,(f_{2k}' f_{2e}'' - f_{2i} f_{2j})\,g\,\alpha_{22}(g,\varphi,\varepsilon_i,\varepsilon_j,\varepsilon_k,\varepsilon_e')\,d\vec{E}\,d\vec{g}\,d\omega$$

(A 14)

$d\omega$ = Raumwinkel zu $d\vec{g}'$

Hierbei wurde $\sigma^{*}_{\nu\nu}$ mit den durch die Integrationen entstehenden Faktoren zu $\alpha_{\nu\nu} \cdot g$ zusammengefaßt. $\alpha_{\nu\nu}$ ist der Wirkungsquerschnitt für den betreffenden Stoß. Die Begründung für diese Behauptung soll hier nur sein, daß bei dieser Zusammenfassung $\overline{I}_{\nu\nu}(\psi)$ gerade von der Form ist, die man erhält, wenn man vom BOLTZMANNschen Stoßzahlansatz im Schwerpunktsystem ausgeht. Prinzipiell läßt sich die Beziehung zwischen $\alpha_{\nu\nu}$ und $\sigma_{\nu\nu}$ auch quantenmechanisch begründen.

Das Ausgehen von den Übergangswahrscheinlichkeiten $\sigma_{\nu\nu}$ hat den Vorteil, daß gewisse Symmetrien leichter überschaubar sind. Das ist vor allem bei den Dissoziationsstoßintegralen der Fall. In dem vorliegenden Fall läßt sich z.B. zeigen, daß aus

$$\sigma_{22}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_j / \vec{\xi}_1', \vec{\xi}_2', \varepsilon_k', \bar{\varepsilon}_\ell') = \sigma_{22}(\vec{\xi}_1', \vec{\xi}_2', \varepsilon_k', \bar{\varepsilon}_\ell' / \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_j) \quad \text{(A 15)}$$

folgt:

$$\alpha_{22}(g, \rho, \varepsilon) g^2 = \alpha_{22}'(g', \rho', \varepsilon') g'^2$$

(ε steht für den Satz der $\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_j, \varepsilon_k', \bar{\varepsilon}_\ell'$)

Mit Hilfe dieser Relation und einer Variablentransformation kann man zeigen, daß bei Herleitung des Stoßintegrals im Schwerpunktssystem nur ein Wirkungsquerschnitt $\alpha_{\nu\nu}$ auftritt

Für die weitere Berechnung müssen die Polynome $H^{(\nu)}$ und $K^{(\nu)}$ in Schwerpunktskoordinaten umgerechnet werden. Es ist zweckmäßig, jeweils gleich

$K^{(\nu)} + \bar{K}^{(\nu)}$ bzw. $H^{(\nu)} + \bar{H}^{(\nu)}$ zu berechnen,

da dann zusätzlich einige Glieder wegfallen.

$$K_\alpha^{(1)} + \bar{K}_\alpha^{(1)} = \frac{2}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}(\vec{\epsilon}-\vec{u})_\alpha = \{H_\alpha^{(1)} + \bar{H}_\alpha^{(1)}\}$$

$$K_{\alpha\beta}^{(2)} + \bar{K}_{\alpha\beta}^{(2)} = 2\left(\frac{(\vec{\epsilon}-\vec{u})^2}{R_2\vartheta} + \frac{g^2}{4R_2\vartheta}\vec{\delta}\right)_{\alpha\beta} = \{H_{\alpha\beta}^{(2)} + \bar{H}_{\alpha\beta}^{(2)}\}$$

$$\bar{K}_\alpha^{(3)} + \bar{\bar{K}}_\alpha^{(3)} = 2(\vec{\epsilon}-\vec{u})_\alpha\left(\frac{(\vec{\epsilon}-\vec{u})^2}{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{g^2}{4(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{5}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\right) + \\ + \frac{\vec{g}_\alpha \vec{g}_\nu (\vec{\epsilon}-\vec{u})_\nu}{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} = \{\bar{H}_\alpha^{(3)} + \bar{\bar{H}}_\alpha^{(3)}\} \qquad \text{(A 16)}$$

$$(\eta_i - \frac{\bar{\bar{\epsilon}}}{k\theta})\bar{K}_\alpha^{(1)} + (\bar{\eta}_j - \frac{\bar{\epsilon}}{k\theta})\bar{K}_\alpha^{(1)} = \frac{(\vec{\epsilon}-\vec{u})_\alpha}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}(\eta_i + \bar{\eta}_j - \frac{2\bar{\epsilon}}{k\theta}) + \\ + \frac{\vec{g}_\alpha}{2(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}(\eta_i - \bar{\eta}_j)$$

Um die Ausdrücke $H^{(\nu)} + \bar{H}^{(\nu)}$ wurde eine geschweifte Klammer gesetzt, was andeuten soll, daß es sich um keine echte Identitäthandelt, sondern einzig um eine Identität der Form nach, die es erlaubt beide Fälle in einem zu behandeln.

R_2 ist dabei für die Ausdrücke $\{H\}$ durch R_1 zu ersetzen.

In derselben Weise sind jetzt die Klammerausdrücke $[\psi]$ umzurechnen.

Benötigt werden die folgenden Integrale:

$I_{11}(\psi)$ für $\psi = (\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2_{\nu\mu}$, $\psi = (\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3_{\nu\mu\mu}$

(A 17)

und

$I_{22}(\psi)$ für $\psi = \epsilon_i$, $\psi = \epsilon_i(\vec{\xi}_2 - \vec{u})_\nu$, $\psi = (\vec{\xi}_2 - \vec{u})^2_{\nu\mu}$

$\psi = (\vec{\xi}_2 - \vec{u})^3_{\nu\mu\mu}$

Die restlichen $I_{\nu\nu}(\psi)$, die in den Stoßtermen der Momentengleichungen auftreten, verschwinden, wie man unter Berücksichtigung von Massenerhaltung und Impulserhaltung bei diesem Stoßtyp aus (A 5) und (A 6) sofort sieht.

Wegen der formalen Ähnlichkeit zwischen $I_m(\psi)$ und $I_{22}(\psi)$ wird nur $I_{22}(\psi)$ berechnet. Durch Spezialisierung erhält man daraus leicht auch die entsprechenden Integrale $I_m(\psi)$

Es ergibt sich:

$$\left[\left(\vec{\xi}_2-\vec{u}\right)_{\nu\mu}^{2'}\right] = \frac{1}{2}\left(\vec{g}^{\,'2}-\vec{g}^{\,2}\right)_{\nu\mu}$$

$$\left[\left(\vec{\xi}_2-\vec{u}\right)_{\nu\mu\mu}^{3'}\right] = \frac{1}{2}\left(\left(\vec{G}-\vec{u}\right)\left(\vec{g}^{\,'2}-\vec{g}^{\,2}\right)\right)_{\nu\mu\mu} \qquad \text{(A 18)}$$

$$\left[\epsilon'\right] = \epsilon_k' + \bar{\epsilon}_\ell' - \epsilon_i - \bar{\epsilon}_j = \frac{m_1}{2}\left(g^2-g'^2\right)$$

$$\left[\epsilon'\left(\vec{\xi}_2-\vec{u}\right)_\nu'\right] = \left(\vec{G}-\vec{u}\right)_\nu \frac{m_1}{2}\left(g^2-g'^2\right) + \frac{1}{2}\vec{g}_\nu'\left(\epsilon_k'-\bar{\epsilon}_\ell'\right) - \frac{1}{2}\vec{g}_\nu\left(\epsilon_i-\bar{\epsilon}_j\right)$$

Zu berechnen sind die Integrale:

$$I_{22} = \frac{1}{2}\sum_{ijk\ell}\int\left[\psi'\right] f_{2i}\,\bar{f}_{2j}\,\alpha_{22}\,g\,d\vec{G}\,d\vec{g}\,d\omega \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\sum_{ijk\ell}\int\left[\psi'\right] f_{20i}\,\bar{f}_{20j}\,\alpha_{22}\,g\left[1+b_\nu^{(1)}\left(k_\nu^{(1)}+\bar{k}_\nu^{(1)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\,b_{\nu\mu}^{(2)}\left(k^{(2)}+\bar{k}^{(2)}\right)_{\nu\mu}+\frac{1}{10}\,\bar{b}_\nu^{(3)}\left(\bar{k}_\nu^{(3)}+\bar{\bar{k}}_\nu^{(3)}\right)+ \qquad \text{(A 19)}$$

$$\left.+\,b_\nu^{(1,1)}\left(\left(\eta_i-\frac{\epsilon}{k\theta}\right)k_\nu^{(1)}+\left(\eta_j-\frac{\bar{\epsilon}}{k\theta}\right)\bar{k}_\nu^{(1)}\right)\right]d\vec{G}\,d\vec{g}\,d\omega$$

Dabei ist

$$f_{2i}\, f_{2j}\, \alpha_{22} = \frac{n_2^2}{(2\pi R_2 \vartheta)^3 Z^2}\, e^{-\frac{(\epsilon-u)^2}{2R_2\vartheta} - \frac{g^2}{4R_2\vartheta} - \eta_i - \bar{\eta}_j}\, \alpha_{22} =$$

$$\stackrel{def}{=} \frac{n_2^2}{(2\pi R_2 \vartheta)^3}\, e^{-\frac{(\epsilon-u)^2}{2R_2\vartheta}}\, F_{22}(g, \varphi, \epsilon)$$

Alle auftretenden Integralterme haben nach (A 16), (A 18) und (A 19) die allgemeine Form (die Summation wurde weggelassen, sie ist jeweils zusätzlich auszuführen):

$$I = \frac{1}{2}\, \frac{n_2^2}{(2\pi R_2 \vartheta)^3} \int F_{22}\, g\, e^{-\frac{(\epsilon-u)^2}{2R_2\vartheta}} (\epsilon-u)^{2n} (\epsilon-u)_{i_1 \dots i_m}^{2m} \cdot$$

$$\cdot \vec{g}^{\,k}_{k_1 \dots k_k}\, \vec{g}^{\,\prime k'}_{k'_1 \dots k'_{k'}}\, d\vec{\epsilon}\, d\vec{g}\, d\omega \qquad \text{(A 20)}$$

Mit Hilfe von (A 3) ist die Integration über $\epsilon^{\rightarrow}$ leicht auszuführen:

$$I = \frac{1}{2}\, \frac{n_2^2}{(2\pi R_2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}\, (R_2\vartheta)^{n+m}\, \frac{(2m+2n+1)!\, m!}{2^n (m+n)!\, (2m+1)!} \cdot \vec{\delta}^{\,m}_{i_1 \dots i_{2m}} \cdot$$

$$\cdot \int F_{22}\, g\, \vec{g}^{\,k}_{k_1 \dots k_k}\, \vec{g}^{\,\prime k'}_{k'_1 \dots k'_{k'}}\, d\vec{g}\, d\omega \qquad \text{(A 21)}$$

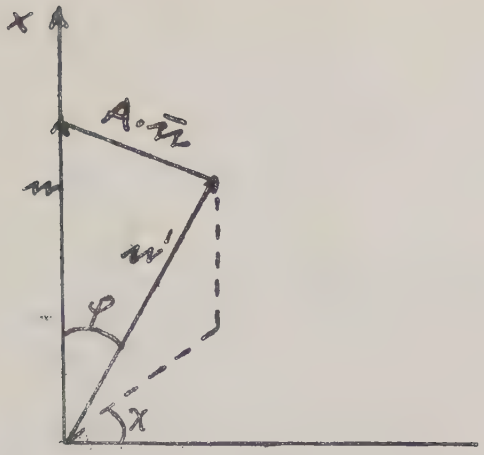
Die Integration von $\vec{g}^{\,\prime k'}$ über den zu $\vec{g}'$ gehörigen Raumwinkel $d\omega = \sin\varphi\, d\varphi\, d\chi$ erfordert einige Zusatzüberlegungen. Es zeigt sich, daß nur Ausdrücke mit

$k' = 0$, $k' = 1$ oder $k' = 2$ auftreten.

Es wird deshalb nur $\int \vec{g}'\, d\chi$ und $\int \vec{g}'^{\,2}\, d\chi$

berechnet. Entsprechend untenstehender Skizze wird ein spezielles Koordinatensystem eingeführt, in dem die

x -Achse durch die Richtung von $\vec{g}$ gegeben ist.



Mit $n = \frac{\vec{g}}{g}$ und $n' = \frac{\vec{g}'}{g'}$ kann man aus der Skizze die folgenden Beziehungen entnehmen:

$$n' = n + A\,\bar{n} \qquad A = 2\sin\frac{\varphi}{2} \tag{A 22}$$

$$\bar{n} = \left(-\sin\tfrac{\varphi}{2},\ \cos\tfrac{\varphi}{2}\cos\chi,\ \cos\tfrac{\varphi}{2}\sin\chi\right)$$

Mit Hilfe von (A 22) kann man das erste Integral leicht ausführen. Es ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} n'\,d\chi = 2\pi\left(1-2\sin^2\tfrac{\varphi}{2}\right)n = 2\pi\cos\varphi\ n \tag{A 23}$$

Für das Integral $\int_0^{2\pi} n'^2\,d\chi$ braucht man die Matrix, die das Integral

$$\int_0^{2\pi} \bar{n}\,\bar{n}\ \,d\chi$$

darstellt.

Man findet:

$$\int_0^{2\pi} \bar{w}\,\bar{\bar{w}}\,d\chi = \begin{pmatrix} 2\pi\sin^2\frac{\varphi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \pi\cos^2\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pi\cos^2\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \pi\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\vec{\delta} + \pi\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right) w^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}(1+\cos\varphi)\,\vec{\delta} + \frac{\pi}{2}(1-3\cos\varphi)\,w^2 \qquad \text{(A 24)}$$

und damit

$$\int_0^{2\pi} w'^2\,d\chi = \pi\sin^2\varphi\,\vec{\delta} + \pi(2-3\sin^2\varphi)\,w^2 \qquad \text{(A 25)}$$

Nachdem die Integration über $d\chi$ ausgeführt ist, bleibt in I noch die Integration über den Raumwinkel von $\vec{g}$, da F nur von g abhängt. Mit Hilfe von (A 1) und (A 2) kann man eine entsprechende Integralformel herleiten.

$$\int \frac{\vec{g}^{2k}}{g^{2k}}\,d\omega_g = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{g^2}{2}} \vec{g}^{2k}\,d\vec{g}}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{g^2}{2}} g^{2k+2}\,dg} = 2\pi\,\frac{2^{k+1}\,k!}{(2k+1)!}\,\vec{\delta}^{k} \qquad \text{(A 26)}$$

Daraus erhält man die hier benötigten speziellen Integrale:

$$\int w^2\,d\omega_g = \frac{4\pi}{3}\,\vec{\delta} \qquad \text{(A 27)}$$

$$\int w^4\,d\omega_g = \frac{4\pi}{15}\,\vec{\delta}^{2} \qquad \text{(A 28)}$$

Mit Hilfe der abgeleiteten Integralformeln (A 23 , A 25 , A 27 , A 28) kann man nun das Integral I endgültig auswerten.

$$I = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{64}{3} n_2^2 (R_2 \vartheta)^{n+m+\frac{3}{2}} \frac{(2m+2n+1)!\, m!}{2^n (m+n)!\, (2m+1)!} \cdot \delta^{\rightarrow m}_{i_1 \dots i_{2m}} B^{(k,k')} \qquad \text{(A 29)}$$

Dabei sind die $B^{(k,k')}$ durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$B^{(0,0)} = \frac{3}{4R_2\vartheta} \int F_{22}\, w^3\, dw\, dz$$

$$B^{(1,1)} = \delta_{kk'} \int F_{22}\, w' w^4 \cos\varphi\, dw\, dz$$

$$B^{(2,0)} = \delta_{k_1 k_2} \int F_{22}\, w^5\, dw\, dz$$

$$B^{(0,2)} = \delta_{k_1' k_2'} \int F_{22}\, w'^2 w^3\, dw\, dz \qquad \text{(A 30)}$$

$$B^{(2,2)} = 2R_2\vartheta \int F_{22}\, w'^2 w^5 \Big[\sin^2\varphi\, \delta^{\rightarrow}_{k_1 k_2'}\, \delta^{\rightarrow}_{k_1 k_2} + \frac{1}{5}(2-3\sin^2\varphi)\, \delta^{\rightarrow 2}_{k_1 k_2 k_1' k_2'}\Big] dw\, dz$$

$$B^{(4,0)} = \frac{4R_2\vartheta}{5} \int F_{22}\, w^7\, dw\, dz\, \delta^{\rightarrow 2}_{k_1 k_2 k_3 k_4}$$

Folgende dimensionslose Größen wurden neu eingeführt:

$$w^2 = \frac{g^2}{4R_2\vartheta} \qquad w'^2 = \frac{g'^2}{4R_2\vartheta} \qquad \sin\varphi\, d\varphi = dz$$

Die auftretenden Integrale haben damit die Dimension des Wirkungsquerschnittes α_{22} . Zusätzlich treten in manchen Termen noch Faktoren $g^2 - g'^2$ auf.

Außerdem werden durch Multiplikation mit den inneren Energien $\mathcal{E}_i$ sich einige Integrale etwas abändern. Diese Änderungen sind aber so leicht überschaubar, daß man mit den Grundintegralen (A 30) alle auftretenden Terme leicht angeben kann.

Beachten muß man bei der Auswertung, daß der Ansatz in HERMITEschen Polynomen symmetrisch geschrieben ist, d.h. zu dem Term $b_{ij} k_{ij}^{(2)}$ gehört ein zweiter $b_{ji} k_{ji}^{(2)}$, der mit dem ersten wegen der Symmetrie von k_{ji} identisch ist.

Schließlich verschwinden alle Integrale mit einer ungeraden Gesamtpotenz von $\vec{g}'$ und $\vec{g}$ wegen der Spiegelungssymmetrie von α_{22}

Wir führen jetzt noch einige Abkürzungen für spezielle Integrale ein.

$$O_1 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijke} \int F_{22}\, w^3 (w'^2 - w^2)\, dw\, dz$$

$$O_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijke} \int F_{22}\, w^3 \left(-w'^2 \sin^2\varphi + \frac{2}{3}(w'^2 - w^2)\right) dw\, dz$$

$$O_3 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijke} \int F_{22}\, w^3 (w'^2 - w^2)\left(\eta_i + \bar{\eta}_j - \frac{2\bar{\varepsilon}}{k\vartheta}\right) dw\, dz \qquad \text{(A 31)}$$

$$O_4 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijke} \int F_{22}\, w^3 \left(-w'^2 \sin^2\varphi + \frac{\pi}{4}(w'^2 - w^2)\right) dw\, dz$$

$$O_5 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijke} \int F_{22}\, w^5 (w'^2 - w^2)\, dw\, dz$$

$$O_6 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijke} \int F_{22}\, w^3 \left[(w'^2 - w^2)\left(\eta_i + \bar{\eta}_j - \frac{2\bar{\varepsilon}}{k\vartheta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\vartheta}{3\vartheta}\left(w^2 (\eta_i - \bar{\eta}_j)^2 - w w' (\eta_i - \bar{\eta}_i)(\eta_i - \bar{\eta}_j)\cos\varphi\right)\right] dw\, dz$$

Mit den eingeführten Abkürzungen erhalten wir folgende Ausdrücke für die benötigten Stoßintegrale: (Es werden bereits alle Terme, die verschwinden, in den ursprünglichen Integralen weggelassen)

$$I_{22}\left((\vec{\xi}_2-\vec{u})_\nu(\vec{\xi}_2-\vec{u})_\mu\right)=\frac{n_2^2}{2(2\pi R_2\vartheta)^3}\sum_{ijkl}\int e^{-\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{2R_2\vartheta}}F_{22}\cdot g\cdot\frac{1}{2}(\vec{g}'^2-\vec{g}^2)_{\nu\mu}\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{b_{\nu\rho}^{(2)}}{2}\frac{\vec{g}_\nu\vec{g}_\rho}{2R_2\vartheta}\right)d\vec{G}d\vec{g}\,d\omega=\frac{64}{15}(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}n_2^2\left(\frac{5}{2}\delta_{\nu\mu}O_1+3b_{\nu\mu}^{(2)}O_2\right) \quad \text{(A}$$

$$I_{22}\left((\vec{\xi}_2-\vec{u})^3_{\nu\mu\mu}\right)=\frac{n_2^2}{2(2\pi R_2\vartheta)^3}\sum_{ijkl}\int F_{22}\,e^{-\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{2R_2\vartheta}}\cdot g\Big[(\vec{G}-\vec{u})_\mu(\vec{g}'^2_{\nu\mu}-\vec{g}^2_{\nu\mu})+$$

$$+\frac{1}{2}(\vec{G}-\vec{u})_\nu(g'^2-g^2)\Big]\cdot\Big[b_\alpha^{(1)}\frac{2}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}(\vec{G}-\vec{u})_\alpha+\frac{b_\alpha^{(3)}}{10}\cdot 2(\vec{G}-\vec{u})_\alpha\Big(\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{g^2}{4(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}-\frac{5}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big)+\frac{b_\alpha^{(3)}}{10}\frac{\vec{g}_\alpha\vec{g}_\rho(\vec{G}-\vec{u})_\rho}{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}+b_\alpha^{(1,1)}\frac{(\vec{G}-\vec{u})_\alpha}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}(\eta_i+\eta_j- \quad \text{(A 33)}$$

$$-\frac{2\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\Big]d\vec{G}d\vec{g}\,d\omega=\frac{64}{15}(R_2\vartheta)^2n_2^2\left(25b_\nu^{(1)}O_1+2b_\nu^{(3)}O_4+\frac{25}{2}O_3\,b_\nu^{(1,1)}\right.$$

$$I_{22}(\varepsilon_i)=\frac{n_2^2}{2(2\pi R_2\vartheta)^3}\sum_{ijkl}\int F_{22}\,e^{-\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{2R_2\vartheta}}\cdot g\cdot\frac{m_1}{2}(g^2-g'^2)d\vec{G}d\vec{g}\,d\omega=$$

$$=-32\,m_1(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}n_2^2\,O_1 \quad \text{(A 34)}$$

$$I_{22}\left(\varepsilon_i(\vec{\xi}_2-\vec{u})_\nu\right)=\frac{n_2^2}{2(2\pi R_2\vartheta)^3}\sum_{ijkl}\int F_{22}\,e^{-\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{2R_2\vartheta}}\cdot g\cdot\Big[\frac{m_1}{2}(\vec{G}-\vec{u})_\nu(g^2-g'^2)+$$

$$+\frac{1}{2}\vec{g}_\nu'(\varepsilon_k'-\bar{\varepsilon}_e')-\frac{1}{2}\vec{g}_\nu(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}_j)\Big]\cdot\Big[b_\alpha^{(1)}\frac{2}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}(\vec{G}-\vec{u})_\alpha+\frac{b_\alpha^{(3)}}{10}\cdot 2(\vec{G}-\vec{u})_\alpha\cdot$$

$$\cdot\Big(\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}+\frac{g^2}{4(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}-\frac{5}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big)+\frac{b_\alpha^{(3)}}{10}\frac{\vec{g}_\alpha\vec{g}_\rho(\vec{G}-\vec{u})_\rho}{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}+ \quad \text{(A 35)}$$

$$+b_\alpha^{(1,1)}\frac{(\vec{G}-\vec{u})_\alpha}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}(\eta_i+\eta_j-\frac{2\bar{\varepsilon}}{k\Theta})+b_\alpha^{(3,1)}\frac{\vec{g}_\alpha}{2(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}(\eta_i-\eta_j)\Big]d\vec{G}\,d\vec{g}\,d\omega=$$

$$=-\frac{32}{3}(R_2\vartheta)^2n_2^2m_1\left(6O_1b_\nu^{(1)}+O_5b_\nu^{(3)}+3O_6\,b^{(1,1)}\right)$$

Die $I_{11}(4)$ erhält man aus den $I_{22}(4)$, indem man $g^{12} = g^2$ setzt (Energiesatz). Weiterhin fallen die Summationen fort. Von den sechs unabhängigen Integralen a_ν im Fall der $I_{22}(4)$ bleibt dann nur ein Integral P übrig:

$$P = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int F_{11}\, w^7 \sin^2\varphi \, dw\, dz \qquad \text{(A 34)}$$

Dies entspricht der bekannten Tatsache, daß bei einatomigen Gasen nur eine einzige unabhängige Konstante in den NAVIER-STOKES Gleichungen auftritt. Wärmeleitung und Viskosität sind durch die Beziehung $\lambda = \frac{15}{4} R_1 \mu$ verknüpft.

$$I_{11}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2_{\nu\mu}\right) = -\frac{64}{5} (R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}} n_1^2 P a^{(2)}_{\nu\mu} \qquad \text{(A 35)}$$

$$I_{11}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3_{\nu\mu\mu}\right) = -\frac{128}{15} (R_1 \vartheta)^2 n_1^2 P \bar{a}^{(3)}_\nu$$

Dabei ist hier $w^2 = \frac{g^2}{4 R_1 \vartheta}$, da alle R_2 durch R_1 zu ersetzen sind.

b) Berechnung von $I_{12}(4)$

Die Berechnung erfolgt nach demselben Schema wie es für die $I_{\nu\nu}$ durchgeführt wurde. Nur werden die Integrale umfangreicher, da einige Symmetrien wegfallen. Die Symmetrie von σ_{12}:

$$\sigma_{12}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \epsilon_i / \vec{\xi}_1', \vec{\xi}_2', \epsilon_j') = \sigma_{12}(\vec{\xi}_1', \vec{\xi}_2', \epsilon_j' / \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \epsilon_i)$$

ergibt jedoch noch eine ähnliche Beziehung wie (A 5).

Es bezeichne der Index $\nu\,(\nu=1,2)$ an einer willkürlichen Funktion ψ, daß diese jeweils eine Funktion von $\vec{\xi}_1$ oder von $\vec{\xi}_2$ und ε_i ist. Die zugehörigen Funktionen ψ' entstehen wie üblich durch Vertauschen der ungestrichenen Koordinaten mit den gestrichenen Koordinaten.
Es gilt dann

$$I_{12}(\psi_1+\psi_2)=\sum_{ij}\int(\psi_1+\psi_2)(f_1'f_{2j}'-f_1f_{2i})\sigma_{12}\,d^4\vec{\xi}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ij}\int(\psi_1+\psi_2-\psi_1'-\psi_2')(f_1'f_{2j}'-f_1f_{2i})\sigma_{12}\,d^4\vec{\xi}=$$

$$=\sum_{ij}\int(\psi_1'+\psi_2'-\psi_1-\psi_2)f_1f_{2i}\sigma_{12}\,d^4\vec{\xi}= \qquad \text{(A 36)}$$

$$\overset{\text{def}}{=}\sum_{ij}\int[\psi_1'+\psi_2']f_1f_{2i}\sigma_{12}\,d^4\vec{\xi}$$

Zur weiteren Behandlung führe man wieder Schwerpunktskoordinaten ein.

$$\vec{G}=\frac{1}{3}(\vec{\xi}_1+2\vec{\xi}_2) \qquad \vec{G}'=\frac{1}{3}(\vec{\xi}_1'+2\vec{\xi}_2') \qquad \text{(A 37)}$$

$$\vec{g}=\vec{\xi}_1-\vec{\xi}_2 \qquad \vec{g}'=\vec{\xi}_1'-\vec{\xi}_2'$$

Die Umkehr ergibt:

$$\vec{\xi}_1=\vec{G}+\frac{2}{3}\vec{g} \qquad \vec{\xi}_1'=\vec{G}'+\frac{2}{3}\vec{g}' \qquad \text{(A 38)}$$

$$\vec{\xi}_2=\vec{G}-\frac{1}{3}\vec{g} \qquad \vec{\xi}_2'=\vec{G}'-\frac{1}{3}\vec{g}'$$

Der Impuls- und Energiesatz haben damit die Form:

$$\vec{G} = \vec{G}'$$

(A 39)

$$\frac{1}{3} m_1 g^2 + \varepsilon_i = \frac{1}{3} m_1 g'^2 + \varepsilon_j' \quad \text{oder} \quad g^2 - g'^2 = \frac{3}{m_1}(\varepsilon_j' - \varepsilon_i)$$

Beim Übergang vom Laborsystem zum Schwerpunktssystem können die Integrationen über die entsprechenden δ -Funktionen ausgeführt werden. Indem man wieder den Wirkungsquerschnitt α_{12} einführt, erhält man in der gleichen Weise wie bei den $I_{\nu\nu}(\psi)$:

$$I_{12}(\psi_1 + \psi_2) = \sum_{ij} \int (\psi_1 + \psi_2)(f_1' f_{2j}' - f_1 f_{2i}) \sigma_{12} \, d^4\vec{\xi} =$$

$$= \sum_{ij} \int (\psi_1 + \psi_2)(f_1' f_{2j}' - f_1 f_{2i}) \sigma_{12}^*(g, \vartheta, \varepsilon) \delta(\vec{G} - \vec{G}') \delta\left(g^2 - g'^2 - \frac{3}{m_1}(\varepsilon_j' - \varepsilon_i)\right) \cdot$$

$$\cdot d\vec{G}' d\vec{G} \, d\vec{g}' d\vec{g} = \sum_{ij} \int (\psi_1 + \psi_2)(f_1' f_{2j}' - f_1 f_{2i}) \alpha_{12}(g, \vartheta, \varepsilon) g \, d\vec{G} \, d\vec{g} \, d\omega =$$

$$= \sum_{ij} \int [\psi_1' + \psi_2'] f_1 f_{2i} \alpha_{12} g \, d\vec{G} \, d\vec{g} \, d\omega \qquad \text{(A 40)}$$

Zu berechnen ist $I_{12}(\psi_1 + \psi_2)$ für folgende ψ_ν:

$$\begin{aligned}
\psi_1 + \psi_2 &: (\vec{\xi}_1 - \vec{u})_\nu & \psi_1 + \psi_2 &: (\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2_{\nu\mu} + 2(\vec{\xi}_2 - \vec{u})^2_{\nu\mu} \\
&: (\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2_{\nu\mu} & &: (\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3_{\nu\mu\mu} + 2(\vec{\xi}_2 - \vec{u})^3_{\nu\mu\mu} \\
&: (\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3_{\nu\mu\mu} & &: \varepsilon_i \qquad \text{(A 41)} \\
& & &: \varepsilon_i (\vec{\xi}_2 - \vec{u})_\nu
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Größen $[\chi_1' + \chi_2']$ in Schwerpunktskoordinaten lauten:

$$[(\vec{\xi}_1 - \vec{u})_\nu'] = \frac{2}{3}(\vec{g}' - \vec{g})_\nu$$

$$[(\vec{\xi}_1 - \vec{u})_{\nu\mu}'^2] = \frac{2}{3}((\vec{G} - \vec{u})(\vec{g}' - \vec{g}))_{\nu\mu} + \frac{4}{9}(\vec{g}'^2 - \vec{g}^2)_{\nu\mu}$$

$$[(\vec{\xi}_1 - \vec{u})_{\nu\mu\mu}'^3] = \frac{2}{3}\left((\vec{G} - \vec{u})^2(\vec{g}' - \vec{g}) + \frac{2}{3}(\vec{G} - \vec{u})(\vec{g}'^2 - \vec{g}^2) + \frac{4}{3}(\vec{g}'^3 - \vec{g}^3)\right)_{\nu\mu\mu}$$

$$[(\vec{\xi}_1 - \vec{u})_{\nu\mu}'^2 + 2(\vec{\xi}_2 - \vec{u})_{\nu\mu}'^2] = \frac{2}{3}(\vec{g}'^2 - \vec{g}^2)_{\nu\mu} \qquad \text{(A 42)}$$

$$[(\vec{\xi}_1 - \vec{u})_{\nu\mu\mu}'^3 + 2(\vec{\xi}_2 - \vec{u})_{\nu\mu\mu}'^3] = \left(\frac{2}{3}(\vec{G} - \vec{u})(\vec{g}'^2 - \vec{g}^2) + \frac{4}{9}(\vec{g}'^3 - \vec{g}^3)\right)_{\nu\mu\mu}$$

$$[\varepsilon_j'] = \varepsilon_j' - \varepsilon_i = \frac{m_1}{3}(g^2 - g'^2)$$

$$[\varepsilon_j'(\vec{\xi}_2 - \vec{u})_\nu'] = \frac{m_1}{3}(\vec{G} - \vec{u})_\nu(g^2 - g'^2) - \frac{1}{3}(\varepsilon_j'\vec{g}' - \varepsilon_i\vec{g})_\nu$$

Die Umrechnung der HERMITEschen Polynome ergibt:

$$H_\alpha^{(1)} = \frac{1}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(\vec{G} - \vec{u} + \frac{2}{3}\vec{g}\right)_\alpha$$

$$K_\alpha^{(1)} = \frac{1}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(\vec{G} - \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{g}\right)_\alpha$$

$$H_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{R_1\vartheta}\left((\vec{G} - \vec{u})^2 + \frac{2}{3}\vec{g}(\vec{G} - \vec{u}) + \frac{4}{9}\vec{g}^2\right)_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \qquad \text{(A 43)}$$

$$K_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{R_2\vartheta}\left((\vec{G} - \vec{u})^2 - \frac{1}{3}\vec{g}(\vec{G} - \vec{u}) + \frac{1}{9}\vec{g}^2\right)_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}$$

$$\vec{H}_\alpha^{(3)} = \frac{1}{(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\left(\vec{G} - \vec{u} + \frac{2}{3}\vec{g}\right)_\alpha\left((G-u)^2 + \frac{4}{9}g^2 + \frac{4}{3}(\vec{G} - \vec{u})_\beta\vec{g}_\beta\right) -$$

$$- \frac{5}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(\vec{G} - \vec{u} + \frac{2}{3}\vec{g}\right)_\alpha$$

$$\vec{K}_\alpha^{(3)} = \frac{1}{(R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\left(\vec{G} - \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{g}\right)_\alpha\left((G-u)^2 + \frac{1}{9}g^2 - \frac{2}{3}(\vec{G} - \vec{u})_\beta\vec{g}_\beta\right) -$$

$$- \frac{5}{(R_2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(\vec{G} - \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{g}\right)_\alpha$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man sich nun den Stoßintegralen selbst zuwenden. Es wird noch definiert:

$$f_{10} f_{2i} \cdot \alpha_{12} = \frac{n_1 n_2}{(2\pi)^3 (R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}} (R_2\vartheta)^{\frac{3}{2}} Z} e^{-\frac{(\xi_1-u)^2}{2R_1\vartheta} - \frac{(\xi_2-u)^2}{2R_2\vartheta} - \eta_i} \cdot \alpha_{12} =$$

$$= \frac{2^{\frac{3}{2}} n_1 n_2}{(2\pi R_1\vartheta)^3 \cdot Z} \alpha_{12} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta} - \frac{1}{3}\frac{g^2}{R_1\vartheta} - \eta_i} =$$

$$\stackrel{def}{=} \frac{2^{\frac{3}{2}} n_1 n_2}{(2\pi R_1\vartheta)^3} F_{12} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}} \qquad \text{(A 44)}$$

In den Integralen I_{12} tritt herrührend von $f_1 f_2$ sowohl R_1 wie R_2 auf. Es wird willkürlich $R_1 = 2R_2$ als Bezugsgröße gewählt und damit auch g und g' dimensionslos gemacht. Wegen der Form des Energiesatzes wird w und w' definiert durch

$$w^2 = \frac{g^2}{3R_1} \qquad w'^2 = \frac{g'^2}{3R_1} \qquad \text{(A 45)}$$

Für die Integration über $\vec{G}$, χ, ω_g kann man die in a) abgeleiteten Formeln benutzen, da die Koordinatenbeziehungen formal dieselben sind. Wegen der etwas anderen Zahlenfaktoren von $f_{10} f_{2i}$ und des fehlenden Faktors $\frac{1}{2}$ aus der Symmetriebeziehung ändern sich die Endformeln (A 29) und (A 30) um Zahlenfaktoren ab. Man erhält

$$I = \frac{n_1 n_2 2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \sum_{ij} \int F_{12}\, g\, e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}} (G-u)^{2n} (G-u)^{2m}_{i_1 \dots i_{2m}} \cdot$$

$$\cdot \vec{g}^{\,k}_{k_1 \dots k_k} \vec{g}'^{\,k'}_{k_1' \dots k_{k'}'} \, d\vec{G}\, d\vec{g}\, d\omega = \qquad \text{(A 46)}$$

$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}} n_1 n_2 \cdot 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{R_1\vartheta}{3}\right)^{n+m} \frac{(2m+2n+1)!\, m!}{2^n (m+n)!\, (2m+1)!} \vec{\delta}^{\,m}_{i_1 \dots i_{2m}} B^{(k,k')}$$

$$B^{(0,0)} = \frac{1}{R_1 \vartheta} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^3\, dw\, dz$$

$$B^{(1,1)} = \delta_{kk'} \sum_{ij} \int F_{12}\, w' w^4 \cos\varphi\, dw\, dz$$

$$B^{(2,0)} = \delta_{k_1 k_2} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^5\, dw\, dz \qquad \text{(A 47)}$$

$$B^{(0,2)} = \delta_{k_1' k_2'} \sum_{ij} \int F_{12}\, w'^2 w^3\, dw\, dz$$

$$B^{(2,2)} = \frac{3}{2} R_1 \vartheta \sum_{ij} \int F_{12}\, w'^2 w^5 \left(\sin^2\varphi\, \vec{\delta}^{\,2}_{k_1 k_2}\, \vec{\delta}^{\,2}_{k_1' k_2'} + \frac{1}{5}(2 - 3\sin^2\varphi)\, \vec{\delta}^{\,2}_{k_1 k_2 k_1' k_2'}\right) dw\, dz$$

$$B^{(4,0)} = \frac{3 R_1 \vartheta}{5}\, \vec{\delta}^{\,2}_{k_1 \cdots k_4} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^7\, dw\, dz$$

Außer den eingeführten Integralen treten wieder einige weitere auf wegen Termen, die Faktoren g^{12}, g^2, ε_j' etc. enthalten. Die auftretenden speziellen Integrale werden wie folgt abgekürzt:

$$Q_1 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^3 (w^2 - w' w \cos\varphi)\, dw\, dz$$

$$Q_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^5 (w^2 - w' w \cos\varphi)\, dw\, dz$$

$$Q_3 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^3 (w^2 - w' w \cos\varphi)\left(\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\right) dw\, dz$$

$$Q_4 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^3 (w'^2 - w^2)\, dw\, dz$$

$$Q_5 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^5 w'^2 \sin^2\varphi\, dw\, dz$$

$$Q_6 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^5 (w'^2 - w^2)\, dw\, dz$$

$$Q_7 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^5 (w^4 - w'^3 w \cos\varphi)\, dw\, dz$$

$$Q_8 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^3 (w^4 - w'^3 w \cos\varphi)\left(\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\right) dw\, dz$$

$$Q_9 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^3 (w'^2 - w^2)\left(\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\right) dw\, dz \qquad \text{(A 48)}$$

$$Q_{10} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^3 (w^2 \eta_i - \cos\varphi\, w' w \eta_j')\, dw\, dz$$

$$Q_{11} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^5 (w^2 \eta_i - \cos\varphi\, w' w \eta_j')\, dw\, dz$$

$$Q_{12} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^3 (w^2 - w'^2)(\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta})\, dw\, dz \quad = Q_1$$

$$Q_{13} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^3 (w^2 \eta_i - w' w \eta_j' \cos\varphi)(\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta})\, dw\, dz$$

$$Q_{14} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ij} \int F_{12}\, w^3 (w^4 - w'^3 w \cos\varphi)\, dw\, dz$$

Damit erhält man folgende Ausdrücke für die gesuchten Integrale I_{12}:

$$I_{12}((\vec{\xi}_1 - \vec{u})_\nu) = n_1 n_2 \frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2}{3 \cdot (2\pi R_1 \vartheta)^3} \sum_{ij} \int F_{12}\, g (\vec{g}' - \vec{g})_\nu\, e^{-\frac{3}{2} \frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{R_1 \vartheta}} \cdot$$

(A 50)

$$\cdot \left(a_\alpha^{(1)} H_\alpha^{(1)} + b_\alpha^{(1)} k_\alpha^{(1)} + \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)}}{10} H_\alpha^{(3)} + \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)}}{10} k_\alpha^{(3)} + b_2^{(1,1)} k_\alpha^{(1)} (\eta_i - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta})\right) d\vec{G}\, d\vec{g}\, dw$$

$$= n_1 n_2 R_1 \vartheta \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{8}{3} \left[\left(-2a_\nu^{(1)} + 2^{\frac{1}{2}} b_\nu^{(1)}\right) Q_1 + \frac{1}{3}\left(2\bar{a}_\nu^{(3)} - \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \bar{b}_\nu^{(3)}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(Q_1 - \frac{2}{5} Q_2\right) + 2^{\frac{1}{2}} b_\nu^{(1,1)} Q_3\right]$$

$$I_{12}((\vec{\xi}_1 - \vec{u})_\nu (\vec{\xi}_1 - \vec{u})_\mu) = \frac{2^{\frac{3}{2}} n_1 n_2}{(2\pi R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \frac{2}{3} \sum_{ij} \int F_{12}\, e^{-\frac{3}{2} \frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{R_1 \vartheta}} \cdot g \cdot$$

$$\cdot \left[(\vec{G} - \vec{u})(\vec{g}' - \vec{g})_{\nu\mu} + \frac{2}{3}(\vec{g}'^2 - \vec{g}^2)_{\nu\mu}\right]\left[1 + \frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{2} H_{\alpha\beta}^{(2)} + \frac{b_{\alpha\beta}^{(2)}}{2} k_{\alpha\beta}^{(2)}\right] d\vec{G}\, d\vec{g}\, dw$$

$$= n_1 n_2 (R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{32}{9} \left(\frac{3}{2} \delta_{\nu\mu} Q_4 + 2a_{\nu\mu}^{(2)} \left(-Q_1 + \frac{2}{5} Q_6 - \frac{3}{5} Q_5\right) + \right. \quad \text{(A 51)}$$

$$\left. + b_{\nu\mu}^{(2)} \left(2Q_1 + \frac{2}{5} Q_6 - \frac{3}{5} Q_5\right)\right)$$

$$I_{12}\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})_{\nu\mu}^2 + 2(\vec{\xi}_2 - \vec{u})_{\nu\mu}^2\right) = \frac{2^{\frac{3}{2}} n_1 n_2}{(2\pi R_1 \vartheta)^3} \frac{2}{3} \sum_{ij} \int F_{12} \cdot e^{-\frac{3}{2} \frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{R_1 \vartheta}} \cdot g \cdot$$

$$\cdot (\vec{g}'^2 - \vec{g}^2)_{\nu\mu} \left(1 + \frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{2} H_{\alpha\beta}^{(2)} + \frac{b_{\alpha\beta}^{(2)}}{2} k_{\alpha\beta}^{(2)}\right) d\vec{G}\, d\vec{g}\, dw =$$

(A 52)

$$= n_1 n_2 (R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{8}{15} \left[15\delta_{\mu\nu} Q_4 + 2(2Q_6 - 3Q_5)\left(2a_{\mu\nu}^{(2)} + b_{\mu\nu}^{(2)}\right)\right]$$

$$I_{12}\left(\left(\vec{\xi}_1 - \vec{u}\right)_{\mu\nu\rho\mu}^3\right) = n_1 n_2 \frac{2^{\frac{1}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \frac{2}{3} \sum_{ij} \int F_{12} e^{-\frac{2}{3}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}} \cdot g \cdot$$

$$\cdot \left[(\vec{G}-\vec{u})^2 (\vec{g}\vec{g}) + \frac{2}{3}(\vec{G}-\vec{u})(\vec{g}''\vec{g}^2) + \frac{4}{9}(\vec{g}^2\vec{g}^2)\right]_{\mu\nu\rho\mu} \cdot \left[a_\alpha^{(1)} H_\alpha^{(1)} + \right.$$

$$\left. + b_\alpha^{(1)} K_\alpha^{(1)} + \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)}}{10} H_\alpha^{(3)} + \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)}}{10} K_\alpha^{(3)} + b_\alpha^{(1,1)} k_\alpha^{(1)}\left(\eta_i - \frac{\varepsilon}{k\vartheta}\right)\right] d\vec{G}\, d\vec{g}\, d\omega =$$

$$= n_1 n_2 (R_1\vartheta)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{8}{13.5}\left[a_\nu^{(1)} 30(-5Q_1 - 4Q_{14} + 5Q_4) + b_\nu^{(1)} 2^{\frac{1}{2}} \cdot 15 \cdot\right.$$

$$\cdot (5Q_1 + 4Q_{14} + 10Q_4) + b^{(1,1)} 2^{\frac{1}{2}} 15(5Q_1 + 4Q_{14} + 10Q_4) + \qquad \text{(A 53)}$$

$$+ \bar{a}_\nu^{(3)}(20Q_1 + 40Q_{14} - 20Q_2 - 50Q_4 + 44Q_6 - 16Q_5 - 16Q_7) +$$

$$\left. + b_\nu^{(3)} 2^{\frac{1}{2}}(17{,}5Q_1 + 5Q_2 - 10Q_{14} - 25Q_4 - 22Q_6 - 2Q_5 + 4Q_7)\right]$$

$$I_{12}\left(\left(\vec{\xi}_1 - \vec{u}\right)_{\mu\rho\mu}^3 + 2\left(\vec{\xi}_2 \cdot \vec{u}\right)_{\mu\rho\mu}^3\right) = \frac{2^{\frac{3}{2}} n_1 n_2}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \sum_{ij} \int F_{12} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}} \cdot g \cdot$$

$$\left[\frac{2}{3}(\vec{G}-\vec{u})(\vec{g}^{12}-\vec{g}^2) + \frac{2}{3}(\vec{g}^2\vec{g}^2)\right]_{\mu\rho\mu}\left[a_\alpha^{(1)} H_\alpha^{(1)} + b_\alpha^{(1)} K_\alpha^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)}}{10} H_\alpha^{(3)} + \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)}}{10} K_\alpha^{(3)} + b_\alpha^{(1,1)} k_\alpha^{(1)}\left(\eta_i - \frac{\varepsilon}{k\vartheta}\right)\right] d\vec{G}\, d\vec{g}\, d\omega =$$

$$= n_1 n_2 (R_1\vartheta)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{4.5}\left[30 a_\nu^{(1)}(-2Q_{14} + 5Q_4) + 2^{\frac{1}{2}} b_\nu^{(1)} 30 \cdot\right.$$

$$\cdot (Q_{14} + 5Q_4) + b_\nu^{(1,1)} 2^{\frac{1}{2}} \cdot 30(Q_{14} + 5Q_4) + \bar{a}_\nu^{(3)}(20Q_{14} - 50Q_4 + 44Q_6 -$$

$$\left. - 16Q_5 - 8Q_7) + \bar{b}_\nu^{(3)} 2^{\frac{1}{2}}(-5Q_{14} - 25Q_4 + 22Q_6 - 8Q_5 + 2Q_7)\right] \qquad \text{(A 54)}$$

$$I_{12}(\varepsilon_i) = n_1 n_2 \frac{2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \sum_{ij} \int F_{12} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}} g \frac{m_1}{3}(g^2 - g^{12}) d\vec{G}\, dg\, d\omega$$

$$= -n_1 n_2 m_1 (R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 12 Q_4 \qquad \text{(A 55)}$$

$$I_{12}\left(\varepsilon_i\left(\vec{\xi}_2 - \vec{u}\right)_\alpha\right) = n_1 n_2 \frac{2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \sum_{ij} \int F_{12} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}} \cdot g \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{m_1}{3}(\vec{G}-\vec{u})_\alpha (g^2 - g^{12}) - \frac{1}{3}(\vec{\xi}_2\vec{g} \cdot \varepsilon_g)_\alpha\right]\left[a_\alpha^{(1)} H_\alpha^{(1)} + b_\alpha^{(1)} K_\alpha^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)}}{10} H_\alpha^{(3)} + \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)}}{10} K_\alpha^{(3)} + b_\alpha^{(1,1)} k_\alpha^{(1)}\left(\eta_i - \frac{\varepsilon}{k\vartheta}\right)\right] d\vec{G}\, d\vec{g}\, d\omega = \qquad \text{(A 56)}$$

$$= n_1 n_2 (R_1\vartheta)^2 m_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 4\left[a_\nu^{(1)}\left(-Q_4 + \frac{2}{3}\frac{\vartheta}{\vartheta} Q_{10}\right) + b_\nu^{(1)} 2^{\frac{1}{2}}\left(-Q_4 - \frac{1}{3}\frac{\vartheta}{\vartheta} Q_{10}\right) + \right.$$

$$+ \bar{a}_\nu^{(3)}\left(\frac{1}{3} Q_4 - \frac{2}{9} Q_6 - \frac{2}{9}\frac{\vartheta}{\vartheta} Q_{10} + \frac{4}{45}\frac{\vartheta}{\vartheta} Q_{11}\right) + b_\nu^{(3)} 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{6} Q_4 + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{9} Q_6 + \frac{1}{18}\frac{\vartheta}{\vartheta} Q_{10} - \frac{1}{45}\frac{\vartheta}{\vartheta} Q_{11}\right) + b_\nu^{(1,1)} 2^{\frac{1}{2}}\left(Q_{13} - \frac{\vartheta}{\vartheta}\frac{1}{3} Q_{13}\right)$$

c) Berechnung von $I_{111}^{12'}(\psi)$

In a) und b) wurde für die Berechnung der Integrale kein Gebrauch gemacht von der Annahme, daß θ und ϑ nur wenig verschieden sind. Die Integrale werden erst später bei der Zusammenfassung nach $\Delta\vartheta$ und $\Delta\theta$ entwickelt. Dagegen wird diese Entwicklung bei den Dissoziationsintegralen teilweise vor, den Integrationen durchgeführt. Die Dissoziationsintegrale $I_{111}^{12'}$ und $I_{112}^{22'}$ weisen keine Symmetrien ähnlich z.B. I_{11} in (A 4) auf. Es sind deshalb genau doppelt soviel Terme zu berechnen wie für die $I_{\nu\mu}$, nämlich die Terme herrührend von dem ersten und zweiten Summanden der Differenz in den Stoßintegralen. Führt man die Entwicklung nach $\Delta\vartheta$, $\Delta\theta$ jedoch gleich durch, so lassen sich die Terme weitgehend zusammenfassen.

Die Umrechnung auf Schwerpunktskoordinaten wird durch folgende Koordinatenbeziehungen vermittelt:

$$\vec{G} = \frac{1}{3}\left(\vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_1' + \vec{\xi}_1''\right) \qquad \vec{G}' = \frac{1}{3}\left(\vec{\xi}_1' + 2\vec{\xi}_2'\right)$$

$$\vec{g}_1 = \vec{\xi}_1' - \frac{1}{2}\vec{\xi}_1'' - \frac{1}{2}\vec{\xi}_1 \qquad \vec{g}' = \vec{\xi}_1' - \vec{\xi}_2' \qquad \text{(A 57)}$$

$$\vec{g}_2 = \vec{\xi}_1'' - \vec{\xi}_1$$

$$\vec{\xi}_1 = \vec{G} + \frac{2}{3}\vec{g}_1 \qquad \vec{\xi}_1' = \vec{G}' + \frac{2}{3}\vec{g}'$$

$$\vec{\xi}_1'' = \vec{G} - \frac{1}{3}\vec{g}_1 - \frac{1}{2}\vec{g}_2 \qquad \vec{\xi}_2' = \vec{G}' - \frac{1}{3}\vec{g}' \qquad \text{(A 58)}$$

$$\vec{\xi}_1 = \vec{G} - \frac{1}{3}\vec{g}_1 + \frac{1}{2}\vec{g}_2$$

Dabei haben der Impuls- und der Energiesatz die Form:

$$\vec{G} = \vec{G}'$$

$$\frac{1}{3} g_1^2 + \frac{1}{2} g_2^2 = \frac{1}{3} g'^2 + \frac{2}{m_1} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)$$

(A 59)

Zu bilden sind Integrale :

$$I_{11}^{12'}(r) = \frac{2}{3} \int (f_1' f_2' - k_1 f_1 f_1^{(2)}) + \sigma_{11}^{12'} d\vec{g}_1' d\vec{g}_2' d\vec{g}_1 d\vec{g}_2 d\vec{g}_1^{(2)} \quad \text{(A 60)}$$

Wegen des Energie- und Impulssatzes lassen sich wiederum fünf der fünfzehn Integrationen sofort ausführen. Das Ergebnis wird wieder so zusammengefaßt, daß man den Stoßzahansatz mit einem Wirkungsquerschnitt

$$\alpha_{11}^{12'}(\varepsilon_1; g' g_1; \varphi, \chi, \psi)$$

erhält.

Dabei sind φ , χ und ψ die Winkel zwischen den Relativgeschwindigkeiten $\vec{g}'$, $\vec{g}_1$ bzw. $\vec{g}_1'$, $\vec{g}_2$ bzw. $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$. Von weiteren Größen darf $\alpha_{11}^{12'}$ wiederum wegen der Translationsinvarianz und Drehinvarianz nicht abhängen. Somit sind also Integrale der folgenden Form auszuwerten :

$$I_{11}^{12'}(r) = \frac{2}{3} \int (f_1' f_2' - k_1 f_1 f_1^{(2)}) + g' \alpha_{11}^{12'} d\vec{G} d\vec{g} d\vec{g}_1 d\omega_2 \quad \text{(A 61)}$$

$d\omega_2$ ist der Raumwinkel von $\vec{g}_2$.

Setzt man den Ansatz (86) und (87) in (A 61) ein, so wird daraus:

$$I_{m_1}^{12'}(\psi) = \sum_j \int \Big[\frac{n_1 n_2 2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1 \vartheta)^3 \cdot Z} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta} - \frac{1}{3}\frac{g^{12}}{R_1\vartheta} - \eta_j'} \varphi_{12} + \\ - \frac{n_1^3 k_1}{(2\pi R_1\vartheta)^{\frac{9}{2}}} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta} - \frac{1}{3}\frac{g_1^2}{R_1\vartheta} - \frac{1}{4}\frac{g_2^2}{R_1\vartheta}} \cdot \varphi_{111} \Big] \cdot g' \psi \cdot \\ \cdot \alpha_{m_1}^{12'} d\vec{G} d\vec{g}' d\vec{g}_1' d\omega_2 \qquad \text{(A 62)}$$

Dabei wurden abkürzend die Größen φ_{12} und φ_{111} eingeführt:

$$\varphi_{12} = \frac{f_1' f_2'}{f_{01}' f_{02}'} \qquad \varphi_{111} = \frac{f_1 \bar{f}_1 \bar{\bar{f}}_1}{f_{10} \bar{f}_{10} \bar{\bar{f}}_{10}} \qquad \text{(A 63)}$$

Unter Verwendung des Energiesatzes (A 59) und durch Entwicklung des Exponentialfaktors nach $\frac{\Theta - \vartheta}{\vartheta}$ erhält man aus (A 62)

$$I_{m_1}^{12'}(\psi) = \frac{n_1}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \sum_j \int \Big(e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta} \cdot \frac{1}{3}\frac{g'^{12}}{R_1\vartheta} - \frac{\varepsilon_j'}{k\vartheta}} \Big(\frac{n_2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{Z} e^{-\eta_j' + \frac{\varepsilon_j'}{k\Theta}} \varphi_{12} \\ - \frac{n_1^2 k_1}{(2\pi R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{E_0}{k\Theta}} \varphi_{111} \Big) g' \psi + \alpha_{m_1}^{12'} d\vec{G} d\vec{g}' d\vec{g}_1' d\omega_2 = \qquad \text{(A 64)}$$

$$\approx \frac{n_1}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \sum_j \int F_{m_1}^{12'} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}} \psi g' \Big(\frac{n_2 2^{\frac{3}{2}}}{Z} (1 + \eta_j' \cdot \overline{\Delta\Theta}) \varphi_{12} - \\ - \frac{n_1^2 k_1}{(2\pi R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{E_0}{k\vartheta}} \varphi_{111} \Big) d\vec{G} d\vec{g}' d\vec{g}_1' d\omega_2$$

mit

$$F_{m_1}^{12'} = e^{-\frac{1}{3}\frac{g'}{R_1\vartheta} - \frac{\varepsilon_j'}{k\vartheta}} \alpha_{m_1}^{12'}$$

und

$$\overline{\Delta\theta} = \frac{\theta - \vartheta}{\vartheta} = \frac{\Delta\theta - \Delta\vartheta}{1 + \Delta\vartheta} \approx \Delta\theta - \Delta\vartheta$$

Führt man noch die Abkürzungen ein:

$$\overline{\beta_j} = \frac{n_2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{Z} \left(1 + \eta_j' \overline{\Delta\theta}\right)$$

$$\beta = \frac{n_2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{Z}, \qquad \gamma = -\frac{n_1^2 k_1}{(\pi R_1 \vartheta)^3} e^{\frac{E_k}{k\vartheta}} \tag{A 65}$$

so kann man $\overline{I}_{nn}^{n2'}(4)$ sc hreiben:

$$\overline{I}_{nn}^{n2'} \approx \frac{n_1}{(2\pi R_1 \vartheta)^3} \sum_j \int f_{nn}^{n'} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1^2 \vartheta}} g' \psi(\beta_j \varphi_{n2} + \beta \varphi_{nn}) d\vec{G}\, d\vec{g}'\, dg'\, d\omega_2 \tag{A 66}$$

$\overline{\beta_j}$ ist entsprechend der in § V gemachten Näherungannahme immer durch β zu ersetzen, wenn $\overline{\beta_j}$ in φ_{n2} mit $a^{(\nu)}$ oder $b^{(\nu)}$ multipliziert wird.

Für die weitere Rechnung werden jetzt die HERMITEschen Polynome und die Funktionen ψ in Schwerpunktskoordinaten benötigt. Es werden jeweils gleich die Polynome gleicher Ordnung und gleichen Typs aus φ_{n2} und φ_{nn} zusammengefaßt. Es ergibt sich:

$$\beta H_\nu^{(\nu)'} + \beta(H_\nu^{(\nu)} + \overline{H}_\nu^{(\nu)} + \overline{\overline{H}}_\nu^{(\nu)}) = \frac{1}{(R_1\vartheta)^{\frac{\nu}{2}}} \left[\beta \frac{\nu}{3} \vec{g}_\nu' + (3\beta + \beta)(\vec{G} - \vec{u})_\nu\right]$$

$$\beta k_\nu^{(\nu)'} = \frac{2^{\frac{\nu}{2}} \beta}{(R_1\vartheta)^{\frac{\nu}{2}}} \left(\vec{G} - \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{g}'\right)_\nu$$

$$\beta H_{\nu\mu}^{(2)'} + \beta(H_{\nu\mu}^{(2)} + \bar{H}_{\nu\mu}^{(2)} + \bar{\bar{H}}_{\nu\mu}^{(2)}) = \frac{1}{R,\vartheta}\Big[\frac{4}{9}\beta\vec{g}^2 + \frac{2}{3}\beta\vec{g}_1^2 + \frac{1}{2}\beta\vec{g}_2^2 + \frac{2}{3}\beta(\vec{G}-\vec{u})\vec{g}' + (\beta+\beta)(\vec{G}-\vec{u})^2 - (3\beta+\beta)\delta'\Big]_{\nu\mu}$$

$$\beta k_{\nu\mu}^{(2)'} = \frac{2\beta}{R,\vartheta}\Big[(\vec{G}-\vec{u})^2 + \frac{1}{9}\vec{g}'^2 - \frac{1}{3}\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})\Big]_{\nu\mu} - \beta\delta_{\nu\mu} \qquad \text{(A 67)}$$

$$\beta H_{\nu}^{(3)} + \beta(\bar{H}_{\nu}^{(3)} + \bar{\bar{H}}_{\nu}^{(3)} + \bar{\bar{\bar{H}}}_{\nu}^{(3)}) = \frac{5}{(R,\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big[(\beta+3\beta)(\vec{G}-\vec{u})_\nu + \frac{2}{3}\beta\vec{g}_\nu'\Big] + \frac{1}{(R,\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\Big[(3\beta+\beta)(\vec{G}-\vec{u})^3 + \frac{2}{3}\beta\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})^2 + (\vec{G}-\vec{u})\Big(\frac{4}{9}\beta\vec{g}'^2 + \frac{2}{9}\beta\vec{g}_1^2 + \frac{1}{2}\beta\vec{g}_2^2\Big) + \frac{8}{27}\beta\vec{g}'^3 + \frac{2}{9}\beta\vec{g}_1^3 - \frac{1}{6}\beta\vec{g}_1\vec{g}_2^2\Big]_{\nu\mu\mu}$$

$$\beta k_{\nu}^{(3)'} = -\frac{5\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{(R,\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\beta\Big(\vec{G}-\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{g}'\Big)_\nu + \frac{2^{\frac{3}{2}}\beta}{(R,\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\Big[(\vec{G}-\vec{u})^3 - \frac{1}{3}\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})^2 + \frac{1}{9}\vec{g}'^2(\vec{G}-\vec{u}) - \frac{1}{27}\vec{g}'^3\Big]_{\nu\mu\mu}$$

Zu berechnen war $\bar{\bar{I}}_{111}^{12'}(\psi)$ für die unten in Schwerpunktskoordinaten angegebenen ψ. Man kann noch in den ψ' die letzte Symmetrie des Integrals $\bar{\bar{I}}_{111}^{12'}(\psi)$ berücksichtigen, die wegen der Symmetrie von $\sigma_{111}^{12'}$ gegen Vertauschung der Teilchen 1, $\bar{1}$, $\bar{\bar{1}}$ besteht:

$$\bar{\bar{I}}_{111}^{12'}(\psi) = \frac{1}{3}\bar{\bar{I}}_{111}^{12'}(\psi_1 + \psi_{\bar{1}} + \psi_{\bar{\bar{1}}}) \qquad \text{(A 68)}$$

Es wird diese Symmetrie jedoch nur benutzt, wenn sich daraus eine Verminderung der Anzahl der Glieder von $I_{m_1}^{n_1'}$ ergibt.

$$\psi = 1$$

$$\psi = (\vec{\xi}_1 - \vec{u}) + (\vec{\xi}_1 - \vec{u}) + (\vec{\xi}_1 - \vec{u}) - (\vec{\xi}_1' - \vec{u}) = 2(\vec{G} - \vec{u}) - \frac{2}{3}\vec{g}'$$

$$\psi = 3(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2 - (\vec{\xi}_1' - \vec{u})^2 = 2(\vec{G} - \vec{u})^2 + (\vec{G} - \vec{u})(2\vec{g}_1 - \frac{2}{3}\vec{g}') + \\ + \frac{4}{3}\vec{g}_1^{\,2} - \frac{4}{9}\vec{g}'^2 \qquad \text{(A 69)}$$

$$\psi = 3(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^2 - (\vec{\xi}_1' - \vec{u})^2 - 2(\vec{\xi}_2' - \vec{u})^2 = (\vec{G} - \vec{u})2\vec{g}_1 + \\ + \frac{4}{3}\vec{g}_1^{\,2} - \frac{2}{3}\vec{g}'^2$$

$$\psi = 3(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3 - (\vec{\xi}_1' - \vec{u})^3 = 2(\vec{G} - \vec{u})^3 + (\vec{G} - \vec{u})^2(2\vec{g}_1 - \frac{2}{3}\vec{g}') + \\ + (\vec{G} - \vec{u})(\frac{4}{3}\vec{g}_1^{\,2} - \frac{4}{9}\vec{g}'^2) + \frac{8}{9}\vec{g}_1^{\,3} - \frac{8}{27}\vec{g}'^3$$

$$\psi = 3(\vec{\xi}_1 - \vec{u})^3 - (\vec{\xi}_1' - \vec{u})^3 - 2(\vec{\xi}_2' - \vec{u})^3 = (\vec{G} - \vec{u})^2 2\vec{g}_1 + \\ + (\vec{G} - \vec{u})(\frac{4}{3}\vec{g}_1^{\,2} - \frac{2}{3}\vec{g}'^2) + \frac{8}{9}\vec{g}_1^{\,3} - \frac{2}{9}\vec{g}'^3$$

$$\psi = -\varepsilon_j'$$

$$\psi = -\varepsilon_j'(\vec{\xi}_2' - \vec{u}) = -\varepsilon_j'(\vec{G} - \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{g}')$$

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen sei wieder eine allgemeine Integrationsformel für die auftretenden Integraltypen hergeleitet. Alle auftretenden Integrale sind von der Form:

$$I = \frac{n_1}{(2\pi R_1 \vartheta)^3} \sum_j \int F_{m_1}^{n_1'} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}} (G-u)\cdot(\vec{G}-\vec{u})_{u_1\cdots u_{2m}}^{2m} \cdot \\ \cdot \vec{g}_{1\,n_1\cdots n_n}^{\,k} \vec{g}_{k_1\cdots k_n}^{\,k'} \vec{g}_{2\,e_1\cdots e_e}^{\,e} \cdot g' \, d\vec{x} \qquad \text{(A 70)}$$

mit

$$d\vec{X} = d\vec{G}\, d\vec{g}_1\, d\vec{g}'\, d\omega_2$$

Dabei sind für die drei Exponenten (h , k , ℓ) die elf Kombinationen möglich:

(0,0,0) (2,0,0) (0,2,0) (0,0,2) (1,1,0) (1,1,2)
(0,2,2) (4,0,0) (2,2,0) (2,0,2) (0,4,0)

Hinzu kommen evtl. noch Faktoren g^{12} , g_1^2 etc. Da aber über g' , g_1 , g_2 nicht integriert wird, sind diese Faktoren in den entsprechenden Endintegralen nur unverändert als Faktoren einzufügen.

Die Integration von (A 70) über $\vec{G}$ ergibt:

$$I = \frac{n_1}{(2\pi R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{R_1\vartheta}{3}\right)^{n+m} \frac{(2m+2n+1)!\, m!}{2^n (n+m)!\, (2m+1)!}\, \vec{\delta}^m R^{(h,k,\ell)} \qquad \text{(A 71)}$$

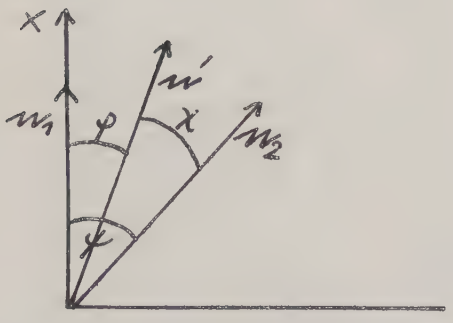
mit

$$R^{(h,k,\ell)} = \sum_j \int F_{111}^{12'} g\, \vec{g}_1^{\,h} \vec{g}'^{\,k} \vec{g}_2^{\,\ell}\, d\vec{g}'\, d\vec{g}_1\, d\omega_2$$

Von den sechs Winkelintegrationen kann man noch drei ausführen. Zu diesem Zweck wird wieder ein spezielles Koordinatensystem eingeführt, indem $\vec{g}_1$ die 1-Achse bestimmt. Die Wahl von $\vec{g}_1$ als Bezugsgröße ist willkürlich, es zeigt sich jedoch, daß die hier gewählte Integrationsfolge auch für die Integrale $I_{112}^{22'}$ am zweckmäßigsten ist, da dann der Rechenaufwand am geringsten ist. Es sei nocheinmal daran erinnert, daß φ , χ die Winkel zwischen $\vec{g}_1$ und $\vec{g}'$ bzw. $\vec{g}_2$ waren. Die untenstehende Skizze veranschaulicht die spezielle Koordinatenwahl.

Es wurden folgende Größen neu eingeführt:

$$w_1 = \frac{\vec{g}_1}{g_1} \quad , \quad w_2 = \frac{\vec{g}_2}{g_2} \quad , \quad w' = \frac{\vec{g}'}{g'}$$



In dem speziellen Koordinatensystem werden die Einheitsvektoren w durch folgende Koordinatentriple dargestellt:

$$\begin{aligned} w_1 &= (1,0,0) \\ w' &= (\cos\varphi, \sin\varphi\cos\bar{\varphi}, \sin\varphi\sin\bar{\varphi}) \\ w_2 &= (\cos\psi, \sin\psi\cos\bar{\psi}, \sin\psi\sin\bar{\psi}) \end{aligned} \qquad \text{(A 72)}$$

Die Raumwinkelelemente von $\vec{g}'$ und $\vec{g}_2$ sind in dieser Darstellung gegeben durch:

$$d\omega' = \sin\varphi\, d\varphi\, d\bar{\varphi} \qquad d\omega_2 = \sin\psi\, d\psi\, d\bar{\psi} \qquad \text{(A 73)}$$

Integriert werden soll über den Raumwinkel von $\vec{g}_1$ und bei festen Werten von φ , ψ , χ über einen Azimutwinkel θ . Dazu werden neue Winkelkoordinaten eingeführt:

$$\theta = \bar{\varphi} \qquad \Gamma = \bar{\psi} - \bar{\varphi} \qquad \text{(A 74)}$$

Für die Integrationselemente gilt dabei:

$$d\bar{\varphi}\, d\bar{\psi} = d\theta\, d\Gamma \qquad \text{(A 75)}$$

Der Relativwinkel Γ ist mit χ über die Beziehung (A 76)

$$w' \cdot w_2 = \sin\varphi \sin\varphi \cos\Gamma + \cos\varphi \cos\varphi = \cos\chi \qquad \text{(A 76)}$$

verbunden, so daß die Integration über Γ der über χ äquivalent ist.

Als Abkürzung sei noch eingeführt:

$$d\omega' d\omega_2 d\omega_1 = dz\, d\theta\, d\omega_1 \;, \quad dz = \sin\varphi \sin\varphi \, d\varphi\, d\varphi\, d\Gamma \qquad \text{(A 77)}$$

Die Integration über den Raumwinkel $d\omega_1$ erhält man nach dem schon früher in a) (A 26) behandelten Verfahren. Es gilt:

$$\int w_1^2 d\omega_1 = \frac{4}{3}\pi\vec{\delta} \;, \quad \int w_1^4 d\omega_1 = \frac{4}{15}\pi\vec{\delta}^2$$

$$\int w_1^6 d\omega_1 = \frac{4}{105}\pi\vec{\delta}^3 \qquad \text{(A 78)}$$

Damit findet man für drei der benötigten Integrale die Ausdrücke:

$$R^{(0,0,0)} = 8\pi^2 \sum_j \int F_{nn'}^{n'} g'^3 g_1^2 dg' dg_1 dz$$

$$R^{(2,0,0)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_j \int F_{nn'}^{n'} g'^3 g_1^4 dg' dg_1 dz \cdot \vec{\delta}_{k_1 k_2}$$

$$R^{(4,0,0)} = \frac{8\pi^2}{15} \sum_j \int F_{nn'}^{n'} g'^3 g_1^6 dg' dg_1 dz \; \vec{\delta}^2_{k_1 k_2 k_3 k_4} \qquad \text{(A 79)}$$

Die Integrale zu den Indexsätzen (0,2,0) (0,0,2) , (0,4,0) (0,0,4) erhält man genauso, wenn man die Gleichberechtigung der drei Raumrichtungen w_1, w_2, w' benutzt, um die Integrationen auszuführen. Enthält das Integral z.B. nur $\vec{g}^{1n}$, so kann man sich das Koordinatensystem statt durch w_1 durch w' festgelegt denken. Die Integration über alle möglichen Raumrichtungen des Gesamtsystems wird dann durch $d\omega'$ statt $d\omega_1$ gegeben. Das Integrationselement $d\omega_1$ dagegen wird in dieser speziellen Darstellung gegeben durch:

$$d\omega_1 = \sin(-\varphi)\, d(-\varphi)\, d\bar{\varphi} = \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta \qquad \text{(A 80)}$$

$d\omega_2$ bleibt einfach erhalten, da diese Integration unabhängig von **den and**eren ist. Damit gilt für diese Fälle:

$$d\omega' d\omega_1 d\omega_2 = dz\, d\theta\, d\omega' \qquad \text{(A 81)}$$

In der gleichen Weise kann man auch w_2 als Bezugsachse wählen.
Unter Verwendung von (A 78) für w' bzw. w_2 ergibt sich damit:

$$R^{(0,2,0)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_j \int F_{m'}^{12'} g^{15} g_1^{\,2}\, dg'\, dg_1\, dz\, \vec{\delta}_{k_1 k_2}$$

$$R^{(0,0,2)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_j \int F_{m'}^{12'} g^{13} g_1^{\,2} g_2^{\,2}\, dg'\, dg_1\, dz\, \vec{\delta}_{\ell_1 \ell_2} \qquad \text{(A 82)}$$

$$R^{(0,4,0)} = \frac{8\pi^2}{15} \sum_j \int F_{m'}^{12'} g^{17} g_1^{\,2}\, dg'\, dg_1\, dz\, \vec{\delta}^{\,2}_{k_1 k_2 k_3 k_4}$$

Für die Integrale mit Indizes (1,1,0) (2,2,0) (2,0,2) , (0,2,2) (1,1,2) muß man sich ähnlich wie in a) und b) genauer mit der Integration über θ beschäftigen. Wie in a) findet man leicht, wenn man die spezielle Koordinatendarstellung benutzt:

$$\int_0^{2\pi} w' d\theta = 2\pi \cos\varphi \, w_1$$

$$\int_0^{2\pi} w'^2 d\theta = \pi \sin^2\varphi \, \vec{\delta} + \pi(2 - 3\sin^2\varphi) w_1^2 \qquad \text{(A 83)}$$

$$\int_0^{2\pi} w_2^2 d\theta = \pi \sin^2\varphi \, \vec{\delta} + \pi(2 - 3\sin^2\varphi) w_1^2$$

Unter Verwendung von (A 78) erhält man schließlich:

$$R^{(1,1,0)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_j \int F_{111}^{12'} g^{14} g_1^3 \cos\varphi \, dg_1 \, dg' dz \, \vec{\delta}_{kk}$$

$$R^{(2,2,0)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_j \int F_{111}^{12'} g^{15} g_1^4 \left(\frac{1}{2} \sin^2\varphi \, \vec{\delta}_{kk} \vec{\delta}_{kk} + \right. \qquad \text{(A 84)}$$

$$\left. + \frac{1}{5}(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\varphi) \vec{\delta}^2_{kkkk} \right) dg_1 dg' dz$$

$$R^{(2,0,2)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_j \int F_{111}^{12'} g^{13} g_1^4 g_2^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2\varphi \, \vec{\delta}_{kk} \vec{\delta}_{ee} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}(1 - \tfrac{3}{2}\sin^2\varphi) \vec{\delta}^2_{kkee} \right) dg_1 dg' dz$$

Produkte $A_{kk} B_{ee}$ sind nach der allgemeinen Produktenregel zu bilden, wobei zusätzlich die Aufteilung in Gruppen zu beachten ist. Z.B. gilt:

$$(\delta_{kk} \delta_{ee})_{k_1 k_2 e_1 e_2} = \delta_{k_1 k_2} \delta_{e_1 e_2}$$

$$(\delta_{ke} \delta_{ek})_{k_1 k_2 e_1 e_2} = \delta_{k_1 e_1} \delta_{k_2 e_2} + \delta_{k_1 e_2} \delta_{k_2 e_1}$$

Die Indizes i_1 , k , bzw. l sind dabei nach (A 70) die Indizes von

$\vec{g}_{i_1}^{\,k}$, $\vec{g}^{\,k}$ bzw. $\vec{g}_{k}^{\,l}$

Es bleiben die Integrale $R^{(1,1,2)}$ und $R^{(0,2,2)}$

Bei der bisherigen Auswertung wurde die Symmetrie der Wirkungsquerschnitte gegen Spiegelungen an beliebigen Ebenen bereits benutzt. Alle Integrale mit ungerader Gesamtpotenz der Vektoren $\vec{g}^{\,i}, \vec{g}_{i_1}, \vec{g}_{k}$ verschwinden. Darüber hinaus verschwinden jedoch auch alle Integrale mit gerader Gesamtpotenz, wenn die Koordinatenindizes nicht in Paaren gleich sind. Bisher ergab sich dies automatisch, die Integrale waren jeweils Produkten von Kroneckerdeltas proportional. Für das Integral $R^{(1,1,2)}$ muß man von dieser Spiegelungssymmetrie jedoch explizit Gebrauch machen, da man sonst einigen Termen nicht ansieht, daß sie verschwinden. Für das Integral $R^{(1,1,2)}$ ist zuerst das Integral $\int_0^{2\pi} w^i w_2^2 \, d\theta$ (A 85) zu berechnen. Das macht man am besten, indem man sich eine Tabelle der nach den obigen Bemerkungen für das Gesamtintegral möglichen Koordinatenindexkombinationen hinschreibt (alle, bei denen mindestens zwei Indizes gleich sind). Mit Hilfe der speziellen Koordinatendarstellung kann man das zugehörige Integral (A 85) berechnen. Anschließend faßt man das Ergebnis wieder in Vektorschreibweise zusammen, nämlich als Linearkombinationen der möglichen dreistufigen Tensoren w_1^3 und $w_1 \vec{\delta}$

Es ergibt sich dann mit der Bezeichnung

$\frac{\vec{g}_1}{g} = w_1$, $\frac{\vec{g}^{\,i}}{g} = w^i$

$$\int w'_{(k)}\, w^2_{2(ee)}\, d\theta = \pi\Big[w^3_{1(kee)}\big(\cos\varphi(2-3\sin^2\varphi) - \sin\varphi\,\sin 2\varphi\cos\Gamma\big) + w_{1(e)}\,\vec{\delta}_{ek}\,\frac{1}{2}\,\sin\varphi\sin(2\varphi)\cos\Gamma + w_{1(k)}\,\vec{\delta}_{ee}\cos\varphi\sin^2\varphi\Big]$$

(A 86)

+ Restglieder, die im Gesamtintegral keinen Beitrag geben.

Ebenso wird jetzt das zu $R^{(0,2,2)}$ gehörige Integral

$\int_0^{2\pi} w'^2 w_2^2\, d\theta$ behandelt.

Man findet:

$$\int_0^{2\pi} w^{12}_{(kk)}\, w^2_{2(ee)}\, d\theta = \frac{\pi}{4}\Big[w^4_{1(kkee)}\big(-4\sin 2\varphi\sin 2\varphi\cos\Gamma + 8 + 19\sin^2\varphi\sin^2\varphi - 12\sin^2\varphi - 12\sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi\sin^2\varphi\sin^2\Gamma\big) + w^2_{1(kk)}\,\vec{\delta}_{ee}\big(4\sin^2\varphi - 5\sin^2\varphi\sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi\sin^2\varphi\sin^2\Gamma\big) + w^2_{1(ee)}\,\vec{\delta}_{kk}\big(4\sin^2\varphi - 5\sin^2\varphi\sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi\sin^2\varphi\sin^2\Gamma\big) + w^2_{1(ek)}\,\vec{\delta}_{ek}\big(\sin 2\varphi\sin 2\varphi\cos\Gamma - \sin^2\varphi\sin^2\varphi\cos 2\Gamma\big) + \delta_{ek}\,\delta_{ek}\sin^2\varphi\sin^2\varphi\cos 2\Gamma + \vec{\delta}_{ee}\,\vec{\delta}_{kk}\sin^2\varphi\sin 2\varphi\,(2\sin^2\Gamma + 1) + \text{Restglieder}\Big]$$

(A 87)

Nach Integration über ω_1 erhält man mit Hilfe von (A 86) und (A 87) die Integrale $R^{(1,1,2)}$ und $R^{(0,2,2)}$.

$$R^{(1,1,2)} = \frac{4\pi^2}{15} \sum_j \int F_{111}^{12'} g'^{14} g_1^3 g_2 \left[\vec{\delta}_{ek} \vec{\delta}_{ek} \left(\cos\varphi (2 - 3\sin^2\psi) + \frac{3}{2} \sin\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma \right) \right.$$

$$\left. + \vec{\delta}_{kk} \vec{\delta}_{ee} \left(2\cos\varphi (1 + \sin^2\psi) - \sin\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma \right) \right] dg_1 \, dg' \, dz$$

$$R^{(0,2,2)} = \frac{4\pi^2}{15} \sum_j \int F_{111}^{12'} g'^{15} g_1^2 g_2^2 \left[\vec{\delta}_{ee} \vec{\delta}_{kk} \left(-\sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma - \right. \right.$$

$$- \cos 2\varphi \cos 2\psi + 3 + 2 \sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma \Big) + \qquad \text{(A 88)}$$

$$+ \vec{\delta}_{ek} \vec{\delta}_{ek} \left(\frac{3}{2} \sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma + \frac{3}{2} \cos 2\varphi \cos 2\psi + \frac{1}{2} - \right.$$

$$\left. \left. - 3 \sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma \right) \right] dg' \, dg_1 \, dz$$

In den Endformeln werden wieder dimensionslose Geschwindigkeiten eingeführt. Angepaßt an die Form des Energiesatzes wird definiert:

$$w'^2 = \frac{g'^2}{3R_1\vartheta} \qquad w_1^2 = \frac{g_1^2}{3R_1\vartheta} \qquad w_2^2 = \frac{g_2^2}{4R_1\vartheta} \qquad \text{(A 89)}$$

Aus den Integralen $R^{(h,k,l)}$ werden noch einige Faktoren herausgezogen und neue Größen $K^{(h,k,l)}$ definiert:

$$R^{(h,k,l)} = \frac{8\pi^2}{3} (3R_1\vartheta)^{\frac{9}{2}} K^{(h,k,l)} \qquad \text{(A 90)}$$

Dann findet man für den gesuchten Integralausdruck (A 70) endgültig:

$$I = (2\pi)^{\frac{3}{2}} 18 (R_1\vartheta)^3 \left(\frac{R_1\vartheta}{3}\right)^{n+m} \cdot n_1 \; \frac{(2m+2n+1)!\; m!}{2^n (m+n)!\,(2m+1)!}\; k^{(h,k,l)} \vec{\delta}_{im} \qquad \text{(A 91)}$$

Die Integrale $k^{(h,k,l)}$ haben für die benötigten Triple (h, k, l) die folgende Gestalt:

$$k^{(0,0,0)} = \frac{1}{R_1\vartheta} \sum_j \int F_{111}^{22'} w^{13} w_1^2 \, d\bar{x}$$

$$k^{(2,0,0)} = \sum_j \int F_{111}^{22'} w^{13} w_1^4 \, d\bar{x} \; \vec{\delta}_{(h,h)}$$

$$k^{(4,0,0)} = \frac{3R_1\vartheta}{5} \sum_j \int F_{111}^{22'} w^{15} w_1^6 \, d\bar{x} \; \vec{\delta}^2_{h,h,h,h}$$

$$k^{(0,2,0)} = \sum_j \int F_{111}^{22'} w^{15} w_1^4 \, d\bar{x} \; \vec{\delta}_{k,k}$$

$$k^{(0,0,2)} = \frac{4}{3} \sum_j \int F_{111}^{22'} w^{13} w_1^4 w_2^2 \, d\bar{x} \; \vec{\delta}_{ll} \qquad \text{(A 92)}$$

$$k^{(0,4,0)} = \frac{3R_1\vartheta}{5} \sum_j \int F_{111}^{22'} w^{17} w_1^4 \, d\bar{x} \; \vec{\delta}^2_{kkkk}$$

$$k^{(1,1,0)} = \sum_j \int F_{111}^{22'} w^{14} w_1^3 \cos\varphi \, d\bar{x} \; \vec{\delta}_{hk}$$

$$k^{(2,2,0)} = 3R_1\vartheta \sum_j \int F_{111}^{22'} w^{15} w_1^4 \left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi \; \vec{\delta}_{hk} \vec{\delta}_{hk} + \frac{1}{5}(1-\frac{3}{2}\sin^2\varphi) \vec{\delta}^2_{hkhk}\right) d\bar{x}$$

$$k^{(2,0,2)} = 4R_1\vartheta \sum_j \int F_{111}^{22'} w^{15} w_1^4 w_2^2 \left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi \; \vec{\delta}_{hk} \vec{\delta}_{ll} + \frac{1}{5}(1-\frac{3}{2}\sin^2\varphi) \vec{\delta}^2_{hkll}\right) d\bar{x}$$

$$k^{(1,1,2)} = \frac{2R_1\vartheta}{5} \sum_j \int F_{111}^{22'} w^{14} w_1^3 w_2^2 \Big[\vec{\delta}_{hk} \vec{\delta}_{ll} \left(\cos\varphi(2-3\sin^2\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\sin\varphi \sin 2\varphi \cos l\right) + \vec{\delta}_{kl} \vec{\delta}_{lh} \left(2\cos\varphi(1+\sin^2\varphi) - \sin\varphi \sin 2\varphi \cos l\right)\Big] d\bar{x}$$

$$K^{(0,2,2)} = \frac{2R_1\vartheta}{5}\sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{15} w_1^2 w_2^2 \Big[\vec{\delta}_{ee}\vec{\delta}_{kk}(-\sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma - \cos 2\varphi \cos 2\psi + 3 + 2\sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma) + \vec{\delta}_{ek}\vec{\delta}_{ek}\left(\frac{3}{2}\sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma + \frac{3}{2}\cos 2\varphi \cos 2\psi + \frac{1}{2} - 3\sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma\right) d\bar{x}$$

Dabei steht $d\bar{x}$ abkürzend für

$$d\bar{x} = dw' dw_1 dz \qquad \text{(A 93)}$$

Um die langen Integralausdrücke, die bei der Auswertung der $I_{111}^{12'}(\psi)$ auftreten, abzukürzen, werden die speziellen Integrale S_ν definiert:

$$S_1 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{13} w_1^2 d\bar{x}$$

$$S_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{13} w_1^2 \eta_j d\bar{x}$$

$$S_3 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{14} w_1^3 \cos\varphi \, d\bar{x}$$

$$S_4 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{15} w_1^2 d\bar{x}$$

$$S_5 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{15} w_1^4 d\bar{x}$$

$$S_6 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{13} w_1^4 \eta_j d\bar{x}$$

$$S_7 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{15} w_1^2 \eta_j d\bar{x}$$

$$S_8 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{15} w_1^4 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) d\bar{x}$$

$$S_9 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{13} w_1^6 \, d\bar{x}$$

$$S_{10} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{13} w_1^4 w_2^2 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) d\bar{x}$$

$$S_{11} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{17} w_1^2 \, d\bar{x}$$

$$S_{12} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{15} w_1^2 w_2^2 \left(2\sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma + \right.$$

$$\left. + 2\cos 2\varphi \cos 2\psi + 9 - 4\sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma\right) d\bar{x}$$

$$S_{13} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{15} w_1^4 \sin^2\varphi \, d\bar{x} \qquad \text{(A 94}$$

$$S_{14} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{13} w_1^4 w_2^2 \sin^2\psi \, d\bar{x}$$

$$S_{15} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{16} w_1^3 \cos\varphi \, d\bar{x}$$

$$S_{16} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{14} w_1^5 \cos\varphi \, d\bar{x}$$

$$S_{17} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{16} w_1^5 \cos\varphi \, d\bar{x}$$

$$S_{18} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{13} w_1^8 \, d\bar{x}$$

$$S_{19} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{13} w_1^6 w_2^2 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\psi\right) d\bar{x}$$

$$S_{20} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{13} w_1^6 w_2^2 \sin^2\psi \, d\bar{x}$$

$$S_{21} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{13} w_1^2 w_2^2 \, d\bar{x}$$

$$S_{22} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w'^{14} w_1^3 w_2^2 \left[\cos\varphi\left(3 - 2\sin^2\psi\right) + \right.$$

$$\left. + \sin\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma\right] d\bar{x}$$

$$S_{23} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w^{15} w_1^2 \eta_j^2 \, d\bar{x}$$

$$S_{24} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w^{19} w_1^2 \, d\bar{x}$$

$$S_{25} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w^{16} w_1^3 w_2^2 \left[\cos\varphi(3-2\sin^2\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sin\varphi \cdot \sin 2\varphi \cdot \cos\Gamma\right] d\bar{x}$$

$$S_{26} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w^{15} w_1^2 w_2^2 \left(\frac{3}{2}\sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}\cos 2\varphi \cos 2\psi + \frac{1}{2} - 3\sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma\right) d\bar{x}$$

$$S_{27} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w^{13} w_1^2 \eta_j^2 \, d\bar{x}$$

$$S_{28} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w^{13} w_1^2 w_2^2 \eta_j \, d\bar{x}$$

$$S_{29} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w^{17} w_1^2 \eta_j \, d\bar{x}$$

$$S_{30} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w^{14} w_1^5 \cos\varphi \cdot \eta_j \, d\bar{x}$$

$$S_{31} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w^{14} w_1^3 w_2^2 \left[\cos\varphi(3-2\sin^2\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sin\varphi \cdot \sin 2\psi \cos\Gamma\right] d\bar{x}$$

$$S_{32} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_j \int F_{111}^{12'} w^{14} w_1^3 \cos\varphi \, \eta_j \, d\bar{x}$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun relativ einfach, die

auszuwerten. Man findet:

$$I_{111}^{12'}(1) = \frac{n_1}{(2\pi R_1 \vartheta)^3} \sum_j \int F_{111}^{12'} e^{-\frac{3}{2}\frac{(G-\omega)^2}{R_1\vartheta}} \cdot g'(\beta_j + \delta) \, d\bar{x} =$$

(A 95)

$$= n_1 \cdot 18 \cdot (R_1\vartheta)^2 \left[(\beta+\delta) S_1 + \beta \Delta\bar{\theta} \, S_2\right]$$

$$I^{12'}_{111}\left(3(\vec{\xi}_1-\vec{u})_\nu-(\vec{\xi}_1'-\vec{u})_\nu\right)=\frac{n_1}{(2\pi R_1\vartheta)^3}\sum_j\int F^{12'}_{111}e^{-\frac{3}{2}\frac{(\vec{G}-\vec{w})^2}{R_1\vartheta}}\cdot g'\cdot$$

$$\cdot\left[2(\vec{G}-\vec{u})_\nu-\frac{2}{3}\vec{g}_\nu'\right]\cdot\left[\frac{a_\alpha^{(1)}}{(R_1\vartheta)^{\frac12}}\left(\frac{2}{3}\beta\vec{g}_\alpha'+(3\delta+\beta)(\vec{G}-\vec{u})_\alpha\right)+\right.$$

$$+\frac{b_\alpha^{(1)}2^{\frac12}\beta}{(R_1\vartheta)^{\frac12}}\left(\vec{G}-\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{g}'\right)_\alpha+\frac{\bar a_\alpha^{(3)}}{2(R_1\vartheta)^{\frac12}}\left((3\delta+\beta)(\vec{G}-\vec{u})_\alpha+\right.$$

$$+\frac{2}{3}\beta\vec{g}_\alpha')+\frac{\bar a_\alpha^{(3)}}{10(R_1\vartheta)^{\frac32}}\left((3\delta+\beta)(\vec{G}-\vec{u})^3+\frac{2}{3}\beta\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})^2+\right.$$

$$+(\vec{G}-\vec{u})\left(\frac{4}{9}\beta\vec{g}'^2+\frac{2}{3}\delta\vec{g}_1^{\,2}+\frac{1}{2}\delta\vec{g}_2^{\,2}\right)+\frac{8}{27}\beta\vec{g}'^3+\delta\cdot\frac{2}{9}\vec{g}_1'^3-$$

$$\left.-\frac{1}{6}\delta\vec{g}_1'\vec{g}_2'^2\right)_{\alpha\beta\beta}-\frac{\bar b_\alpha^{(3)}2^{\frac12}\beta}{2\cdot(R_1\vartheta)^{\frac12}}\left(\vec{G}-\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{g}'\right)_\alpha+$$

$$+\frac{\bar b_\alpha^{(3)}\cdot2^{\frac32}\cdot\beta}{10(R_1\vartheta)^{\frac32}}\left((\vec{G}-\vec{u})^3-\frac{1}{3}\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})^2+\frac{1}{9}\vec{g}'^2(\vec{G}-\vec{u})-\frac{1}{27}\vec{g}'^3\right)_{\alpha\beta\beta}+$$

$$\left.+\frac{b_\alpha^{(1,1)}}{(R_1\vartheta)^{\frac12}}\cdot2^{\frac12}\beta\left(\vec{G}-\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{g}'\right)_\alpha\left(\eta_j-\frac{\bar\varepsilon}{k\Theta}\right)\right]d\vec{x}\;=\qquad\text{(A 96)}$$

$$=2n_1(R_1\vartheta)^{\frac52}\left[a_\nu^{(1)}\left(6(3\delta+\beta)S_1-4\beta S_4\right)+\right.$$

$$+b_\nu^{(1)}2^{\frac12}\beta\left(2S_4+6S_1\right)+\bar a_\nu^{(3)}\left(-2(3\delta+\beta)S_1+\frac{8}{3}\beta S_4+\right.$$

$$+2\delta S_5+2\delta S_{21}-\frac{8}{15}\beta S_{11}-\frac{2}{5}\delta S_{16}+\frac{2}{5}\delta S_{22}\Big)+$$

$$+\bar b_\nu^{(3)}\cdot2^{\frac12}\beta\left(-S_1-S_4+\frac{2}{3}S_{11}\right)+b_\nu^{(1,1)}2^{\frac12}\beta\left(6S_2+2S_7-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar\varepsilon}{k\Theta}\left(6S_1+2S_4\right)\right]$$

$$I^{12'}_{111}\left(3(\vec{\xi}_1-\vec{u})^2_{\nu\mu}-(\vec{\xi}_1'-\vec{u})^2_{\nu\mu}-2(\vec{\xi}_2'-\vec{u})^2_{\nu\mu}\right)=$$

$$=\frac{n_1}{(2\pi R_1\vartheta)^3}\sum_j\int F^{12'}_{111}e^{-\frac{3}{2}\frac{(\vec{G}-\vec{w})^2}{R_1\vartheta}}\cdot g'\cdot\left[2(\vec{G}-\vec{u})\vec{g}_1+\frac{4}{3}\vec{g}_1^{\,2}-\frac{2}{3}\vec{g}'^2\right]_{\nu\mu}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\beta\vec{g}'+\delta\right)+\frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{2R_1\vartheta}\left(\frac{4}{9}\beta\vec{g}'^2+\frac{2}{3}\delta\vec{g}_1^{\,2}+\frac{\delta}{2}\vec{g}_2^{\,2}+\frac{2}{3}\beta\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})\right)_{\alpha\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{b_{\alpha\beta}^{(2)}\cdot\beta}{R_1\vartheta}\left(\frac{1}{9}\vec{g}'^2-\frac{1}{3}\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})\right)_{\alpha\beta}\right]d\vec{x}\;=\qquad\text{(A 97)}$$

$$= \frac{4}{5} n_1 (R_1\vartheta)^3 \Big[\delta_{\nu\mu} \cdot 15 \Big((\beta+\mu)(2S_5 - S_4) + \beta \cdot \Delta\theta (2S_6 - S_7) \Big) +$$

$$+ a^{(2)}_{\nu\mu} \Big(8\beta (5S_3 + 2S_8 - S_{11}) + 6\mu (4S_9 + 4S_{10} - 2S_8 - S_{26}) \Big) +$$

$$+ b^{(2)}_{\nu\mu} \cdot 4\beta (-10 S_3 + 2S_8 - S_{11}) \Big]$$

$$I^{12'}_{111} \Big(3(\vec{F}_1 - \vec{u})^2_{\nu\mu} - (\vec{F}_1' - \vec{u})^2_{\nu\mu} \Big) = \frac{n_1}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \sum_j \int F^{12'}_{111} e^{-\frac{3}{2}\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{R_1\vartheta}} \cdot$$

$$\cdot g' \cdot \Big[2(\vec{G}-\vec{u})^2 + (\vec{G}-\vec{u})(2\vec{g}_1 - \tfrac{2}{3}\vec{g}') + \tfrac{4}{3}\vec{g}_1^{\,2} - \tfrac{4}{9}\vec{g}^{\,12} \Big]_{\nu\mu} \cdot$$

$$\cdot \Big[(\beta_j + \mu) + \frac{a^{(2)}_{\alpha\beta}}{2R_1\vartheta} \Big(\tfrac{4}{9}\beta \vec{g}^{\,12} + \tfrac{2}{3}\mu \vec{g}_1^{\,2} + \tfrac{\mu}{2}\vec{g}_2^{\,2} + \tfrac{2}{3}\beta (\vec{G}-\vec{u})\vec{g}' +$$

$$+ (\beta + 3\mu)(\vec{G}-\vec{u})^2_{\alpha\beta} + \frac{b^{(2)}_{\alpha\beta}}{2R_1\vartheta} 2\beta \Big((\vec{G}-\vec{u})^2 + \tfrac{1}{9}\vec{g}^{\,12} -$$

$$- \tfrac{1}{3}\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})_{\alpha\beta} \Big] d\vec{x} = \qquad \text{(A 98)}$$

$$= n_1 (R_1\vartheta)^3 \frac{4}{15} \Big[\delta_{\nu\mu} \cdot 15 \Big((\beta+\mu)(3S_1 + 6S_5 - 2S_4) +$$

$$+ \beta \Delta\theta (3S_2 + 6S_6 - 2S_7) \Big) + a^{(2)}_{\nu\mu} \Big(2\beta (15 S_1 + 60 S_3 -$$

$$- 20 S_4 - 24 S_8 - 8 S_{11}) + 6\mu (15 S_1 + 12 S_9 + 12 S_{10} -$$

$$- 4 S_8 - 2 S_{26}) \Big) + b^{(2)}_{\nu\mu} \cdot 4\beta (15 S_1 - 30 S_3 + 10 S_4 + 6 S_8 - 2 S_{11}) \Big]$$

$$I^{12'}_{111} \Big(3(\vec{F}_1 - \vec{u})^3_{\nu\mu\mu} - (\vec{F}_1' - \vec{u})^3_{\nu\mu\mu} - 2(\vec{F}_2' - \vec{u})^3_{\nu\mu\mu} \Big) =$$

$$= \frac{n_1}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \sum_j \int F^{12'}_{111} e^{-\frac{3}{2}\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{k_1\vartheta}} \cdot g' \cdot \Big[2(\vec{G}-\vec{u})^2 \vec{g}_1 +$$

$$+ (\vec{G}-\vec{u}) \Big(\tfrac{4}{3}\vec{g}_1^{\,2} - \tfrac{2}{3}\vec{g}^{\,12} \Big) + \tfrac{8}{9}\vec{g}_1^{\,3} - \tfrac{2}{9}\vec{g}^{\,13} \Big]_{\nu\mu\mu} \cdot$$

$$\cdot \Big[\frac{a^{(1)}_{\alpha}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \Big(\tfrac{2}{3}\beta \vec{g}_2' + (3\mu + \beta)(\vec{G}-\vec{u})_\alpha \Big) + \frac{b^{(1)}_{\alpha}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}} \beta \Big(\vec{G}-\vec{u} - \tfrac{1}{3}\vec{g}' \Big)_\alpha -$$

$$- \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)}}{2(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left((3\gamma+\beta)(\vec{G}-\vec{u})+\frac{2}{3}\beta\vec{g}'\right)_\alpha + \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)}}{10(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\Big((3\gamma+\beta)(\vec{G}-\vec{u})^3 +$$

$$+\frac{2}{3}\beta\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})^2+(\vec{G}-\vec{u})\left(\frac{4}{9}\beta\vec{g}'^2+\frac{2}{3}\gamma\vec{g}_1^{\,2}+\frac{1}{2}\gamma\vec{g}_2^{\,2}\right)+$$

$$+\frac{8}{27}\beta\vec{g}'^3+\frac{2}{9}\gamma\vec{g}_1^{\,3}-\frac{1}{6}\gamma\vec{g}_1\vec{g}_2^{\,2}\Big)_{\alpha\beta\beta} - \qquad \text{(A 99)}$$

$$- \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)}2^{\frac{1}{2}}\beta}{2(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(\vec{G}-\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{g}'\right)_\alpha + \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)}2^{\frac{3}{2}}\beta}{10(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\Big((\vec{G}-\vec{u})^3 -$$

$$-\frac{1}{3}\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})^2+(\vec{G}-\vec{u})\frac{1}{9}\vec{g}'^2-\frac{1}{27}\vec{g}'^3\Big)_{\alpha\beta\beta} +$$

$$+\frac{b_\alpha^{(3,1)}2^{\frac{1}{2}}\beta}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(\vec{G}-\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{g}'\right)_\alpha\left(\eta_j-\frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\right)\Big]d\bar{x} =$$

$$= 2(R_1\vartheta)^{\frac{7}{2}}n_1\Big[2a_\nu^{(1)}\big(\beta(10S_3+10S_5-5S_4+8S_{16}-2S_{11})+$$

$$+15\gamma(2S_5-S_4)\big)+b_\nu^{(1)}2^{\frac{1}{2}}2\beta(-5S_3+10S_5-5S_4-4S_{16}+S_{11})+$$

$$+\frac{2\bar{a}_\nu^{(3)}}{15}\Big(2\beta(-10S_3-25S_5+\frac{25}{2}S_4+22S_8+25S_{13}+$$

$$+5S_{11}+10S_{15}-20S_{16}+8S_{17}-2S_{24})+$$

$$+\gamma(-150S_5+75S_4+81S_9+21S_{10}+\frac{75}{2}S_{14}-$$

$$-33S_8-\frac{75}{2}S_{13}-3S_{12}-3S_{17}+12S_{18}-36S_{19}$$

$$-30S_{20}+3S_{25})\Big)+\frac{\bar{b}_\nu^{(3)}2^{\frac{1}{2}}\beta}{15}\Big(-10S_{15}+20S_{16}-27S_{11}-$$

$$-8S_{17}+2S_{24}-35S_3-50S_5+25S_4+50S_{13}+44S_8\Big)+$$

$$+b_\nu^{(3,1)}\beta\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2(-5S_{32}-4S_{30}+S_{29}+10S_6-5S_7+$$

$$+\frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}(5S_3+4S_{16}-S_{11}-10S_5+5S_4)\big)\Big]$$

$$I_{111}^{12'}\left(3(\vec{\xi}_1-\vec{u})^3_{\mu\mu}-(\vec{\xi}_1'-\vec{u})^3_{\mu\mu}\right) =$$

$$= \frac{n_1}{(\pi R_1\vartheta)^3}\sum_j \int F_{111}^{12'} e^{-\frac{3}{2}\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{R_1\vartheta}} \cdot g'\cdot\Big[2(\vec{G}-\vec{u})^3+(\vec{G}-\vec{u})^2(2\vec{g}_1-\tfrac{2}{3}\vec{g}')+$$

$$+(\vec{G}-\vec{u})(\tfrac{4}{3}\vec{g}_1^{\,2}-\tfrac{4}{9}\vec{g}'^2)+\tfrac{8}{9}\vec{g}_1^{\,3}-\tfrac{8}{27}\vec{g}'^3\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big[\frac{a_\alpha^{(1)}}{(R_1\vartheta)^{\frac12}}\left(\tfrac{2}{3}\beta\vec{g}_\alpha'+(3\delta+\beta)(\vec{G}-\vec{u})_\alpha\right)+\frac{b_\alpha^{(1)}}{(R_1\vartheta)^{\frac12}}2^{\frac12}\beta(\vec{G}-\vec{u}-\tfrac{1}{3}\vec{g}')_\alpha+$$

$$-\frac{\bar a_\alpha^{(3)}}{2(R_1\vartheta)^{\frac12}}\left((3\delta+\beta)(\vec{G}-\vec{u})+\tfrac{2}{3}\beta\vec{g}'\right)_\alpha+\frac{\bar a_\alpha^{(3)}}{10(R_1\vartheta)^{\frac32}}\Big((3\delta+\beta)(\vec{G}-\vec{u})^3+$$

$$+\beta\cdot\tfrac{2}{3}\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})^2+(\vec{G}-\vec{u})\left(\tfrac{4}{9}\beta\vec{g}'^2+\tfrac{2}{3}\delta\vec{g}_1^{\,2}+\tfrac12\delta\vec{g}_2^{\,2}\right)+$$

$$+\beta\tfrac{8}{27}\vec{g}'^3+\tfrac{2}{9}\delta\vec{g}_1^{\,3}-\tfrac16\delta\vec{g}_1\vec{g}_2^{\,2}\Big)_{\alpha\beta\beta}-$$

$$-\frac{\bar b_\alpha^{(3)}}{2(R_1\vartheta)^{\frac12}}\beta 2^{\frac12}\left(\vec{G}-\vec{u}-\tfrac13\vec{g}'\right)_\alpha+\frac{\bar a^{(3)}2^{\frac32}}{10(R_1\vartheta)^{\frac32}}\beta\Big((\vec{G}-\vec{u})^3-$$

$$-\tfrac13\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})^2+\tfrac19\vec{g}'^2(\vec{G}-\vec{u})-\tfrac{1}{27}\vec{g}'^3\Big)_{\alpha\beta\beta}+$$

$$+\frac{b_\alpha^{(1,1)}}{(R_1\vartheta)^{\frac12}}2^{\frac12}\beta\left(\vec{G}-\vec{u}-\tfrac13\vec{g}'\right)_\alpha\left(\eta_1'-\frac{\varepsilon}{k\Theta}\right)\Big]d\vec{x} = \qquad \text{(A 100)}$$

$$= 2n_1(R_1\vartheta)^{\frac32}\Big[a_\nu^{(1)}\Big(2\beta\Big(5S_1+10S_3-\tfrac{20}{3}S_4+8S_{16}-\tfrac83S_{11}+$$

$$+10S_5\Big)+6\delta\left(5S_1+10S_5-\tfrac{10}{3}S_4\right)\Big)+b_\nu^{(1)}2^{\frac12}\beta\cdot2\Big(5S_1-$$

$$-5S_3-\tfrac53S_4+10S_5-4S_{16}+\tfrac43S_{11}\Big)+\bar a_\nu^{(3)}\Big(\beta\Big(-\tfrac83S_1+$$

$$+\tfrac{16}{3}S_4-\tfrac{16}{15}S_{11}-\tfrac{20}{3}S_5-\tfrac83S_3+\tfrac{88}{15}S_8+\tfrac{20}{3}S_3-$$

$$-\tfrac{16}{3}S_{16}+\tfrac{32}{15}S_{17}-\tfrac{32}{45}S_{24}+\tfrac83S_{15}\Big)+\delta\Big(-8S_1+\tfrac{50}{3}S_5+$$

$$+\tfrac{10}{3}S_{21}+\tfrac{54}{5}S_9+\tfrac{14}{5}S_{10}+5S_{14}-\tfrac23S_{16}+\tfrac23S_{22}+$$

$$+\tfrac{20}{3}S_4-\tfrac{44}{15}S_8-\tfrac{10}{3}S_{13}-\tfrac{4}{15}S_{12}+\tfrac85S_{18}-\tfrac{24}{5}S_{19}-4S_{20}-$$

$$-\tfrac{8}{15}S_{17}+\tfrac{8}{15}S_{25}\Big)+b_\nu^{(3)}2^{\frac12}\beta\Big(-\tfrac13S_1+3S_4-\tfrac73S_3-\tfrac23S_{15}-$$

$$-\tfrac65S_{11}-\tfrac{10}{3}S_5+\tfrac{44}{15}S_8+\tfrac{10}{3}S_{13}+\tfrac43S_{16}-\tfrac{8}{15}S_{17}+\tfrac{8}{45}S_{24}\Big)+$$

$$+b_\nu^{(1,1)}2^{\frac12}\beta\Big(10S_2-10S_{32}-\tfrac{10}{3}S_7-8S_{30}+\tfrac83S_{29}+20S_6-$$

$$-\frac{\varepsilon}{k\Theta}\left(10S_1-10S_3-\tfrac{10}{3}S_4-8S_{16}+\tfrac83S_{11}+20S_5\right)\Big)\Big]$$

$$I_{111}^{12'}(-\varepsilon_j) = -\frac{k\Theta\, n_1}{(2\pi R_1\vartheta)^3}\sum_j \int F_{111}^{12'} e^{-\frac{3}{2}\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{R_1\vartheta}} g' \eta_j (\beta_j + \delta) d\vec{x} =$$

$$= -18\, n_1 (R_1\vartheta)^2 k\Theta \left((3+\delta) S_2 + 3\Delta\Theta\, S_{27}\right) \qquad \text{(A 101)}$$

$$I_{111}^{12'}\left(-\varepsilon_j\left(\frac{\vec{\xi}'}{2} - \vec{u}\right)_\nu\right) = -\frac{k\Theta\, n_1}{(2\pi R_1\vartheta)^3}\sum_j \int F_{111}^{12'} e^{-\frac{3}{2}\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{R_1\vartheta}} g' \eta_j \cdot$$

$$\cdot \left[\vec{G}-\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{g}'\right]_\nu \left[\frac{a_\alpha^{(1)}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{8}{3}\beta\vec{g}' + (3\delta+\beta)(\vec{G}-\vec{u})\right)_\alpha + \right.$$

$$+ \frac{b_\alpha^{(1)} 2^{\frac{1}{2}}\beta}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(\vec{G}-\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{g}'\right)_\alpha - \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)}}{2(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\left((3\delta+\beta)(\vec{G}-\vec{u}) + \frac{2}{3}\beta\vec{g}'\right)_\alpha +$$

$$+ \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)}}{10(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\left((3\delta+\beta)(\vec{G}-\vec{u})^3 + \beta\frac{2}{3}\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})^2 + (\vec{G}-\vec{u})\left(\frac{4}{9}\beta\vec{g}'^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{3}\delta\vec{g}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\delta\vec{g}_2^{\,2}\right) + \frac{8}{27}\beta\vec{g}'^3 + \frac{2}{9}\delta\vec{g}_1^{\,3} - \frac{1}{6}\delta\vec{g}_1\vec{g}_2^{\,2}\right)_{\alpha\beta} -$$

$$- \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)} 2^{\frac{1}{2}}}{2(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\beta\left(\vec{G}-\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{g}'\right)_\alpha + \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)} 2^{\frac{3}{2}}\beta}{10(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\left((\vec{G}-\vec{u})^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\vec{g}'(\vec{G}-\vec{u})^2 + (\vec{G}-\vec{u})\frac{1}{9}\vec{g}'^2 - \frac{1}{27}\vec{g}'^3\right)_{\alpha\beta} +$$

$$\left. + \frac{b_\alpha^{(1,1)}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}}\beta\left(\vec{G}-\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{g}'\right)_\alpha \left(\eta_j - \frac{\varepsilon}{k\Theta}\right)\right] d\vec{x} = \qquad \text{(A 102)}$$

$$= -6\, n_1 (R_1\vartheta)^{\frac{5}{2}} k\Theta\left[a_\nu^{(1)}\left((3\delta+\beta)S_2 - \frac{2}{3}\beta S_7\right) + \right.$$

$$+ b_\nu^{(1)} 2^{\frac{1}{2}}\beta\left(S_2 + \frac{1}{3}S_7\right) + \bar{a}^{(3)}\left(\beta\left(-\frac{1}{3}S_2 + \frac{4}{9}S_7 - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{4}{45}S_{29}\right) + \delta\left(-S_2 + \frac{1}{3}S_7 + \frac{1}{3}S_{28} - \frac{1}{15}S_{30} + \frac{1}{15}S_{31}\right)\Big) +$$

$$+ \bar{b}_\nu^{(3)} 2^{\frac{1}{2}}\beta\left(-\frac{1}{6}S_2 + \frac{1}{18}S_7 + \frac{1}{45}S_{29}\right) +$$

$$\left. + b_\nu^{(1,1)}\beta 2^{\frac{1}{2}}\left(S_{27} + \frac{1}{3}S_{23} - \frac{\varepsilon}{k\Theta}\left(S_2 + \frac{1}{3}S_7\right)\right)\right]$$

Die Integrale S_ν sind nicht alle unabhängig. Benutzt man den Energiesatz (A 59) und die Symmetrie (A 68), so erhält man noch Beziehungen zwischen einigen Integralen S_ν. Da die Ausnutzung dieser Beziehungen die Integrale (A 95) - (A 102) nicht übersichtlicher macht, werden diese hier nicht weiter benutzt. Für numerische Auswertungen sollte man sie jedoch beachten.

d) Berechnung von $I_{112}^{22'}$

Leider lassen sich die Integrale I_{111}^{12} und $I_{112}^{22'}$ nicht gemeinsam berechnen, wie das für I_{11} und I_{22} möglich war. Der Gang der Rechnung ist jedoch für beide vollkommen gleich, es ändern sich nur Zahlenfaktoren, so daß wesentliche Teile von c) übernommen werden können.
Der Zusammenhang zwischen Schwerpunkts- und Laborkoordinaten ist hier folgender:

$$\vec{G} = \frac{1}{4}\left(\vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_1' + 2\vec{\xi}_2\right) \qquad \vec{G}' = \frac{1}{2}\left(\vec{\xi}_2' + \vec{\xi}_2''\right)$$

$$\vec{g}_1 = \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_1' \qquad \vec{g}' = \vec{\xi}_2' - \vec{\xi}_2''$$

$$\vec{g}_2 = \frac{1}{2}\vec{\xi}_1 + \frac{1}{2}\vec{\xi}_1' - \vec{\xi}_2 \qquad \text{(A 103)}$$

$$\vec{\xi}_1 = \vec{G} + \frac{1}{2}\vec{g}_1 + \frac{1}{2}\vec{g}_2 \qquad \vec{\xi}_2' = \vec{G} + \frac{1}{2}\vec{g}'$$

$$\vec{\xi}_1' = \vec{G} - \frac{1}{2}\vec{g}_1 + \frac{1}{2}\vec{g}_2 \qquad \vec{\xi}_2'' = \vec{G}' - \frac{1}{2}\vec{g}' \qquad \text{(A 104)}$$

$$\vec{\xi}_2 = \vec{G} - \frac{1}{2}\vec{g}_2$$

Der Impuls- und Energiesatz lauten:

$$\vec{G} = \vec{G}'$$

$$\frac{1}{2}g_1^2 + \vec{g}_2^2 + \frac{2}{m_1}(\varepsilon_i + E_0) = g'^2 + \frac{2}{m_1}(\varepsilon_j' + \varepsilon_k') \qquad \text{(A 105)}$$

Durch Einführung der Schwerpunktskoordinaten und Ausführung der fünf Integrationen über die δ -Funktionen in den Stoßintegralen erhält man die zu berechnenden Integrale wieder in der Schreibweise mit dem Wirkungsquerschnitt

$$\alpha_{112}^{22'}(g', g_1, \vartheta, \chi, \varphi, \varepsilon_i, \varepsilon_j', \bar{\varepsilon}_k'):$$

$$I_{112}^{22'}(\psi) = \sum_{ijk} \int \psi (f_{2j}' \bar{f}_{2k}' - k_1 f_1 \bar{f}_1 f_{2i}) \sigma_{112}^{22'} d^5 \vec{\xi} =$$

(A 106)

$$= \sum_{ijk} \int \psi (f_{2j}' \bar{f}_{2k}' - k_1 f_1 \bar{f}_1 f_{2i}) \alpha_{112}^{22'} g' d\vec{\varepsilon} d\vec{\gamma} d\vec{g}' d\omega_2$$

Durch Einsetzen des Ansatzes (86) (87) wird daraus:

$$I_{112}^{22'}(\psi) = \sum_{ijk} \int \psi \Big(\frac{n_2^2 2^3}{(2\pi R_1 \vartheta)^3 Z^2} e^{-2\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta} - \frac{1}{2}\frac{g'^2}{R_1\vartheta} - \eta_j' - \bar{\eta}_k'} \varphi_{22} -$$

$$- \frac{k_1 n_1^2 n_2 2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}} \cdot Z} e^{-2\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta} - \frac{g_1^2}{4R_1\vartheta} - \frac{1}{2}\frac{g_2^2}{R_1\vartheta} - \eta_i} \cdot \varphi_{112} \Big) g' \alpha_{112}^{22'} d\vec{G} d\vec{\gamma} d\vec{g}_1 d\omega$$

(A 107)

mit

$$\varphi_{22} = \frac{f_2' \bar{f}_2'}{f_{20}' \bar{f}_{20}'}$$

und

$$\varphi_{112} = \frac{f_1 \bar{f}_1 f_2}{f_{10} \bar{f}_{10} f_{20}}$$

Entwickelt man wieder in (A 107) die Exponentialfaktoren mit η_i , η_j' , $\bar{\eta}_k'$ und bricht bei linearen Gliedern in $\frac{\Theta - \vartheta}{\vartheta}$ ab, so ergibt sich:

$$I_{112}^{22'}(\psi) \approx \frac{n_2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1 \vartheta)^3} \sum_{ijk} \int \psi F_{112}^{22'} e^{-\frac{(\bar{\varepsilon}_i - u)^2}{R_1 \vartheta}} \left(\frac{n_2 2^{\frac{3}{2}}}{Z} (1 + \right.$$

$$\left. + (\eta_j' + \bar{\eta}_k') \Delta\bar{\theta}) \varphi_{22} - \frac{k_1 n_1^2}{(2\pi R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{E_0}{k\vartheta}} (1 + \eta_i \Delta\bar{\theta}) \varphi_{112} \right) g' d\bar{x} \qquad \text{(A 108)}$$

Dabei ist:

$$F_{112}^{22'} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{g^{12}}{2R_1\vartheta} - \frac{\varepsilon_j' + \bar{\varepsilon}_k'}{k\vartheta}} \alpha_{112}^{22'}$$

Es werden wieder die Abkürzungen β und γ eingeführt:

$$\beta = \frac{n_2 2^{\frac{3}{2}}}{Z} \quad , \quad \gamma = \frac{n_1^2 k_1}{(2\pi R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{E_0}{k\vartheta}}$$

Dazu kommen die neuen Abkürzungen:

$$\bar{\beta}_{jk} = \frac{n_2 2^{\frac{3}{2}}}{Z} (1 + (\eta_j' + \bar{\eta}_k') \Delta\bar{\theta})$$

$$\bar{\gamma}_i = \frac{k_1 n_1^2}{(2\pi R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{E_0}{k\vartheta}} (1 + \eta_i \Delta\bar{\theta}) \qquad \text{(109)}$$

Nach der früher eingeführten Näherung ist $\bar{\beta}_{jk}$ und $\bar{\gamma}_i$ durch β und γ zu ersetzen, wenn sie mit einem $a^{(\nu)}$ **oder** $b^{(\nu)}$ multipliziert werden.

Die Umrechnung der HERMITEschen Polynome in Schwerpunktskoordinaten, wobei jeweils die Polynome gleichen Typs und gleicher Ordnung aus φ_{112} und φ_{22} zusammengenommen werden, ergibt:

$$\mathcal{H}(H_\nu^{(1)} + \bar{H}_\nu^{(1)}) = \frac{\delta}{(R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left(\right)_\nu$$

$$\beta(k_\nu^{(1)\prime} + \bar{k}_\nu^{(1)\prime}) + \delta k_\nu^{(1)} = \frac{\nu^2}{(R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left(\right)_\nu$$

$$\mathcal{H}(H_{\nu\mu}^{(2)} + \bar{H}_{\nu\mu}^{(2)}) = \frac{\delta^2}{R_1 \vartheta} \left(\right)_{\nu\mu}$$

$$\beta(k_{\nu\mu}^{(2)\prime} + \bar{k}_{\nu\mu}^{(2)\prime}) + \delta k_{\nu\mu}^{(2)} = \frac{2}{R_1^2} \left(\right)_{\nu\mu}$$

$$\mathcal{H}(H_\nu^{(3)} + \bar{H}_\nu^{(3)}) = -\frac{5\delta}{(R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left(\right)_\nu + \frac{\delta^2}{(R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \left(\right)_\nu$$

$$\beta(k_\nu^{(3)\prime} + \bar{k}_\nu^{(3)\prime}) + \delta k_\nu^{(3)} = -\frac{\nu^2}{(R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left(\right)_\nu + \frac{2\nu^2}{(R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \left(\right)_\nu$$

$$\beta\left[k_\nu^{(1)\prime}\left(\eta_i' - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\right) + k_\nu^{(1)}\left(\eta_i - \frac{\varepsilon}{k\Theta}\right)\right] = \frac{\nu^2}{(R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left(\right)_\nu - \delta k_\nu^{(1)}\left(\eta_i - \frac{\varepsilon}{k\Theta}\right)$$

(A 110)

Zu berechnen ist $I_{\nu\mu}^{22'}(\mathcal{H})$ für die unten aufgeführten, in Schwerpunktskoordinaten umgerechneten Funktionen $\mathcal{H}$.

Dabei wurde von den letzten in $I_{\nu\mu}^{22'}$ enthaltenen Symmetrien Gebrauch gemacht. Es gilt nämlich wegen der Symmetrie der $\sigma_{\nu\mu}^{22'}$ gegen Vertauschung der Teilchen mit Index $2'$

und $\bar{2}'$ sowie der Teilchen mit Index 1 bzw. $\bar{1}$:

$$I_{112}^{22'}(\psi(\xi_1)) = I_{112}^{22'}(\psi(\xi_1))$$

$$I_{112}^{22'}(\psi(\xi_2', \varepsilon_j')) = I_{112}^{22'}(\psi(\xi_2', \bar{\varepsilon}_k')) \qquad \text{(A 111)}$$

$$\psi = 1$$

$$\psi = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_1') - u = G - u + \frac{1}{2} g_2$$

$$\psi = \frac{1}{2}(\xi_1 - u)^2 + \frac{1}{2}(\xi_1' - u)^2 = (G-u)^2 + \frac{1}{2} g_2 (G-u) + \frac{1}{4} g_1^2 + \frac{1}{4} g_2^2$$

$$\psi = \frac{1}{2}(\xi_1 - u)^2 + \frac{1}{2}(\xi_1 - u)^2 + (\xi_2 - u)^2 - (\xi_2' - u)^2 - (\xi_2' - u)^2 =$$
$$= \frac{1}{4} g_1^2 + \frac{1}{2} g_2^2 - \frac{1}{2} g'^2$$

$$\psi = \frac{1}{2}(\xi_1 - u)^3 + \frac{1}{2}(\xi_1 - u)^3 = (G-u)^3 + (G-u)^2 \frac{1}{2} g_2 +$$
$$+ (G-u)\left(\frac{1}{4} g_1^2 + \frac{1}{4} g_2^2\right) + \frac{1}{8} g_1^2 g_2 + \frac{1}{8} g_2^3$$

$$\psi = \frac{1}{2}(\xi_1 - u)^3 + \frac{1}{2}(\xi_1 - u)^3 + (\xi_2 - u)^3 - (\xi_2' - u)^3 - (\xi_2' - u)^3 =$$
$$= \frac{1}{8} g_1^2 g_2 + (G-u)\left(\frac{1}{4} g_1^2 + \frac{1}{2} g_2^2 - \frac{1}{2} g'^2\right) \qquad \text{(A 112)}$$

$$\psi = \varepsilon_j - \varepsilon_j' - \bar{\varepsilon}_k' \overset{\text{def}}{=} \Delta\varepsilon$$

$$\psi = \varepsilon_i(\xi_2 - u) - \varepsilon_j'(\xi_2' - u) - \bar{\varepsilon}_k'(\xi_2' - u) = \Delta\varepsilon(G-u) -$$
$$- \frac{1}{2}\varepsilon_i g_2 + \frac{1}{2} g'(\varepsilon_k' - \varepsilon_j')$$

Nun ist wieder eine allgemeine Integrationsformel für die Integrale der Form

$$I = \frac{1}{(2\pi R_1 \vartheta)^3} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g' e^{-2\frac{(G-u)^2}{R_1 \vartheta}} (G-u)^{2n} (G-u)^{2m}_{k_1 \cdots k_{2m}} \cdot$$
$$\cdot g_{1\,k_1 \cdots k_n}^{\vec{h}} g'^{\vec{k}}_{k_1 \cdots k_m} g_{2\,\ell_1 \cdots \ell_\ell}^{\vec{\ell}} \, dx \qquad \text{(A 113)}$$

herzuleiten. Die Exponenten (h , k , ℓ) kommen dabei in den dreizehn Kombinationen vor:

(0,0,0) (2,0,0) (0,2,0) (0,0,2) (2,2,0) (0,2,2) (2,0,2)

(4,0,0) (0,4,0) (0,0,4) (0,1,1) (2,1,1) (4,0,2)

Faktoren g'^2, g_1^2, g_2^2, die eventuell noch dazu kommen, sind in die Endintegrale einfach mit einzufügen, da über sie nicht integriert wird.

Die Integration von (A 113) über $\vec{\sigma}$ führt zu:

$$I = \frac{1}{(2\pi R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}} 2^3} \left(\frac{R_1 \vartheta}{4}\right)^{3+m_1} \frac{(2m_1+2m_3+1)!\, m_1!}{2^{m}(m_1 \ldots)!\,(2m+1)!} \vec{\sigma}^{m} R^{(h,k,l)} \qquad \text{(A 114)}$$

mit

$$R^{(h,k,l)} = \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g'\, \vec{g}_1^{\,h} \vec{g}'^{\,k} \vec{g}_2^{\,l}\, dg_1\, dg'\, d\omega$$

Für einen Teil der Integrale $R^{(h,k,l)}$ kann man direkt die Ergebnisse von c) übernehmen, da sich diese Integrale in den ausführbaren Integrationen über die Einheitswinkel nicht unterscheiden.

Man erhält:

$$R^{(0,0,0)} = 8\pi^2 \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g'^3 g_1^2\, dg_1\, dg'\, dz$$

$$R^{(2,0,0)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g'^3 g_1^4\, dg_1\, dg'\, dz\; \vec{\delta}_{hh}$$

$$R^{(4,0,0)} = \frac{8\pi^2}{15} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g'^3 g_1^6\, dg_1\, dg'\, dz\; \vec{\delta}^{\,2}_{hhhh}$$

$$R^{(0,2,0)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g'^5 g_1^2\, dg_1\, dg'\, dz\; \vec{\delta}_{hh}$$

$$R^{(0,0,2)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g'^3 g_1^2 g_2^2\, dg_1\, dg'\, dz\; \vec{\delta}_{ll} \qquad \text{(A 115)}$$

$$R^{(0,4,0)} = \frac{8\pi^2}{15} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g^{17} g_1^2 \, dg_1 \, dg' \, dz \, \vec{\delta}^{\,2}_{hbhb}$$

$$R^{(0,0,4)} = \frac{8\pi^2}{15} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g^{13} g_1^2 g_2^4 \, dg_1 \, dg' \, dz \, \vec{\delta}^{\,2}_{eeee}$$

$$R^{(2,2,0)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g^{15} g_1^4 \left[\vec{\delta}^{\,2}_{hhbb} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \vec{\delta}_{hh} \vec{\delta}_{hb} \sin^2\varphi \right] dg_1 \, dg' \, dz$$

$$R^{(2,0,2)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g^{13} g_1^4 g_2^2 \left[\vec{\delta}^{\,2}_{hhee} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \vec{\delta}_{hh} \vec{\delta}_{ee} \sin^2\varphi \right] dg_1 \, dg' \, dz$$

$$R^{(0,2,2)} = \frac{4\pi^2}{15} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} g^{15} g_1^2 g_2^2 \left[\vec{\delta}_{ee} \vec{\delta}_{hh} \left(-\sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma \right.\right.$$
$$\left. - \cos 2\varphi \cos 2\psi + 3 + 2\sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma \right) +$$
$$+ \vec{\delta}_{eh} \vec{\delta}_{eh} \left(\frac{3}{2} \sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma + \frac{3}{2} \cos 2\varphi \cos 2\psi + \frac{1}{2} - \right.$$
$$\left. \left. - 3\sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma \right) \right] dg' \, dg_1 \, dz$$

Die Bezeichnungen für die Winkel sind dabei ebenfalls dieselben wie in c) .

Die letzten drei Integrale wurden in c) nicht benötigt, sie lassen sich aber mit Hilfe der dort hergeleiteten Integrationsformeln (A 78) und (A 83) und der zusätzlichen Hilfsformel (A 116)

$$\int_0^{2\pi} w' w_2 \, d\theta = \pi \sin\varphi \sin\psi \cos\Gamma \cdot \vec{\delta} + \pi w_1^2 \left(2\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\Gamma\right)$$

(A 116)

leicht herleiten.

Man findet:

$$R^{(\alpha,\alpha,\alpha)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_{ijk} \int F_{m_2}^{22'} g'^4 g_1^2 g_2 (\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) dg_1 dg_1' dz$$

$$\rho^{(\alpha,\alpha,\alpha)} = \frac{8\pi^2}{3} \sum_{ijk} \int F_{m_2}^{22'} g'^4 g_1^2 g_2 \left[\frac{3}{2} \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta \, \vec{\delta}_{kn} \vec{\delta}_{en} + \right. \quad \text{(A 117)}$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\cos\varphi\cos\psi - \frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \vec{\delta}_{kn} \vec{\delta}_{en} \right] dg_1 dg_1' dz$$

$$\rho^{(\alpha,\alpha,\alpha)} = \frac{8\pi^2}{15} \sum_{ijk} \int F_{m_2}^{22'} g'^3 g_1^4 g_2^2 \left[\frac{3}{2} \sin^2\varphi \, \vec{\delta}_{ee} \vec{\delta}_{kn} \vec{\delta}_{kn} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi) \vec{\delta}_{kn} \vec{\delta}_{kn} \vec{\delta}_{en} \right] dg_1 dg_1' dz$$

Statt g_1 , g_2 , g' werden wieder dimensionslose Größen w eingeführt

$$w_1^2 = \frac{g_1^2}{4R_1^2} \qquad w^2 = \frac{g'^2}{4R_1^2} \qquad w_2^2 = \frac{g_2^2}{2R_1^2} \quad \text{(A 118)}$$

und schließlich Integrale $k^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ definiert:

$$R^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{8\pi^2}{3} (2R_1^2)^{\frac{7}{2}} \sum_{ijk} k^{(\alpha,\beta,\gamma)} \quad \text{(A 119)}$$

Die $k^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ sind gegeben durch:

$$k^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{1}{2R_1^2} \sum_{ijk} \int F_{m_2}^{22'} w'^{\alpha} w_1^{\beta} w_2^{\gamma} d\tau$$

$$k^{(\alpha,\alpha,\alpha)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{ijk} \int F_{m_2}^{22'} w'^{\alpha} w_1^{\alpha} w_2^{\alpha} d\tau \, \vec{\delta}_{kn}$$

$$k^{(\alpha,\alpha,\alpha)} = \frac{8R_1^2}{3} \sum_{ijk} \int F_{m_2}^{22'} w'^{\alpha} w_1^{\alpha} w_2^{\alpha} d\tau \, \vec{\delta}_{kn} \vec{\delta}_{kn} \vec{\delta}_{kn}$$

$$K^{(0,2,0)} = \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{5} w_1^{2} \, d\bar{x} \; \vec{\delta}_{hh} \qquad \text{(A 120)}$$

$$K^{(0,0,2)} = \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{3} w_1^{2} w_2^{2} \, d\bar{x} \; \vec{\delta}_{ee}$$

$$K^{(0,4,0)} = \frac{2R_1\vartheta}{5} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{7} w_1^{2} \, d\bar{x} \; \vec{\delta}^{2}_{hhhh}$$

$$K^{(0,0,4)} = \frac{2R_1\vartheta}{5} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{3} w_1^{2} w_2^{4} \, d\bar{x} \; \vec{\delta}^{2}_{eeee}$$

$$K^{(2,2,0)} = 4R_1\vartheta \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{5} w_1^{4} \left(\frac{1}{5} \vec{\delta}^{2}_{hhhh} \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \vec{\delta}_{hh} \vec{\delta}_{hh} \sin^2\varphi \right) d\bar{x}$$

$$K^{(2,0,2)} = 4R_1\vartheta \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{3} w_1^{4} w_2^{2} \left(\frac{1}{5} \vec{\delta}^{2}_{hhee} \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\psi\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \vec{\delta}_{hh} \vec{\delta}_{ee} \sin^2\psi \right) d\bar{x}$$

$$K^{(0,2,2)} = \frac{R_1\vartheta}{5} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{5} w_1^{2} w_2^{2} \left[\vec{\delta}_{ee} \vec{\delta}_{hh} \left(-\sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma - \right.\right.$$
$$\left. - \cos 2\varphi \cos 2\psi + 3 + 2\sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma \right) +$$
$$+ \vec{\delta}_{eh} \vec{\delta}_{eh} \left(\frac{3}{2} \sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma + \frac{3}{2} \cos 2\varphi \cos 2\psi - \frac{1}{2} - \right.$$
$$\left.\left. - 3\sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma \right) \right] dg' \, dg_1 \, dz$$

$$K^{(0,1,1)} = \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{4} w_1^{2} w_2 \left(\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \cos\Gamma \right) d\bar{x}$$

$$K^{(2,1,1)} = 4R_1\vartheta \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{4} w_1^{4} w_2 \left[\frac{1}{2} \sin\varphi \sin\psi \cos\Gamma \, \vec{\delta}_{hh} \vec{\delta}_{eh} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5} \left(\cos\varphi \cos\psi - \frac{1}{2} \sin\varphi \sin\psi \cos\Gamma \right) \vec{\delta}^{2}_{hheh} \right] d\bar{x}$$

$$K^{(4,0,2)} = \frac{(4K_1\vartheta)^2}{3}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\, w^{13} w_1^{6} w_2^2\Big[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\, \vec{\delta}_{kk}\, \vec{\delta}^{\,2}_{kkkk} +$$

$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\varphi\right)\vec{\delta}^{\,3}_{kkkkkk}\Big]\, d\bar{x}$$

Das Integral (A 113) schreibt sich damit endgültig:

$$I = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\,\frac{16}{3}\,(R_1\vartheta)^3\left(\frac{R_1}{\dots}\right)^{\dots}\frac{(2m+2n+1)!!\,m!}{2^{n}\,(n+1)!\,(2m+1)!}\,\vec{\delta}^{\,m}\,K^{(k,\dots)}$$

(A 121)

Für die eigentliche Auswertung der Stoßintegrale werden wieder Abkürzungen T_ν für spezielle Integrale eingeführt:

$$T_1 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\, w^{13} w_1^2\, d\bar{x}$$

$$T_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\, w^{13} w_1^2\,(\eta_j' + \eta_k')\, d\bar{x}$$

$$T_3 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\, w^{13} w_1^2\,\eta_k\, d\bar{x} \qquad \text{(A 122)}$$

$$T_4 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\, w^{13} w_1^4\, d\bar{x}$$

$$T_5 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\, w^{13} w_1^2 w_2^2\, d\bar{x}$$

$$T_6 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\, w^{13} w_1^6\, d\bar{x}$$

$$T_7 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\, w^{13} w_1^4 w_2^2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) d\bar{x}$$

$$T_8 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\, w^{13} w_1^4 w_2^2 \sin^2\varphi\, d\bar{x}$$

$$T_9 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\, w^{13} w_1^2 w_2^4\, d\bar{x}$$

$$T_{10} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{14} w_1^2 w_2 (\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \cos\Gamma) \cdot (\eta_j' - \bar{\eta}_k') d\bar{x}$$

$$T_{11} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{13} w_1^2 w_2^2 \eta_i \, d\bar{x}$$

$$T_{12} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{13} w_1^4 (\eta_j' + \bar{\eta}_k') d\bar{x}$$

$$T_{13} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{13} w_1^2 w_2^2 (\eta_j' + \bar{\eta}_k') d\bar{x}$$

$$T_{14} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{15} w_1^2 (\eta_j' + \bar{\eta}_k') d\bar{x}$$

$$T_{15} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{13} w_1^6 d\bar{x}$$

$$T_{16} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{15} w_1^4 (1 - \tfrac{3}{2} \sin^2\varphi) d\bar{x}$$

$$T_{17} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{13} w_1^2 w_2^4 \eta_i \, d\bar{x}$$

$$T_{18} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{15} w_1^2 w_2^2 \left(\tfrac{3}{2} \sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma + \tfrac{3}{2} \cos 2\varphi \cos 2\psi - \tfrac{1}{2} - 3 \sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma\right) d\bar{x}$$

$$T_{19} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{17} w_1^2 d\bar{x}$$

$$T_{20} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{13} w_1^4 \eta_i \, d\bar{x}$$

$$T_{21} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{15} w_1^2 \eta_i \, d\bar{x}$$

$$T_{22} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{15} w_1^4 \sin^2\varphi \, d\bar{x}$$

$$T_{23} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w^{15} w_1^2 w_2^2 \left(-\sin 2\varphi \sin 2\psi \cos\Gamma - \cos 2\varphi \cos 2\psi + 3 + 2 \sin^2\varphi \sin^2\psi \sin^2\Gamma\right) d\bar{x}$$

$$T_{24} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{3} w_1^{6} w_2^{2} (9 - 8\sin^2\psi)\, d\bar{x}$$

$$T_{25} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{4} w_1^{4} w_2 \left(\cos\varphi\cos\psi + \tfrac{1}{3}\sin\varphi\sin\psi\cos\Gamma\right) \cdot (\eta_j' - \bar{\eta}_k')\, d\bar{x}$$

$$T_{26} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{3} w_1^{4} w_2^{2} \left(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2\psi\right) \eta_i\, d\bar{x}$$

$$T_{27} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{3} w_1^{4} w_2^{4} \left(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2\psi\right) d\bar{x}$$

$$T_{28} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{3} w_1^{2} w_2^{6}\, d\bar{x}$$

$$T_{29} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{4} w_1^{2} w_2^{3} \left(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\Gamma\right) \cdot (\eta_j' - \bar{\eta}_k')\, d\bar{x}$$

$$T_{30} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{3} w_1^{2} (\eta_i - \eta_j' - \bar{\eta}_k')(\eta_j' + \bar{\eta}_k')\, d\bar{x}$$

$$T_{31} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{3} w_1^{2} (\eta_i - \eta_j' - \bar{\eta}_k')\, \eta_i\, d\bar{x}$$

$$T_{32} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{4} w_1^{2} w_2 \left(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\Gamma\right) \cdot \eta_i (\eta_j' - \bar{\eta}_k')\, d\bar{x}$$

$$T_{33} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{5} w_1^{2} (\eta_j' - \bar{\eta}_k')^2\, d\bar{x}$$

$$T_{34} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} w'^{3} w_1^{2} w_2^{2} \eta_i^{2}\, d\bar{x}$$

Mit diesen Abkürzungen erhält man für die gesuchten Integrale die folgenden Ausdrücke:

$$I(1) = \frac{n_2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} e^{-2\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}} g' \left(\bar{\beta}_{jk} + \bar{\gamma}_i\right) d\bar{x} =$$

$$= n_2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 16 (R_1\vartheta)^2 \left[(\beta+\gamma)T_1 + \Delta\bar{\theta}(\beta T_2 + \gamma T_3)\right] \qquad \text{(A 123)}$$

$$I\left((\vec{\xi}_1 - \vec{u})_\nu\right) = \frac{n_2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22'} e^{-2\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}} \cdot g' \cdot$$

$$\cdot \left(\vec{G} - \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{g}_2\right)_\nu \left[\frac{a_\alpha^{(1)} \cdot \gamma}{(R_1\vartheta)^{\frac{n}{2}}} \cdot \left(2(\vec{G}-\vec{u}) + \vec{g}_2\right)_\alpha + \right.$$

$$+ \frac{b_\alpha^{(1)}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}} \left((2\beta+\gamma)(\vec{G}-\vec{u}) - \frac{\gamma}{2}\vec{g}_2\right)_\alpha -$$

$$- \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)} \gamma}{2(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left(2(\vec{G}-\vec{u}) + \vec{g}_2\right)_\alpha + \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)} \gamma}{10(R_1\vartheta)^3} \left(2(\vec{G}-\vec{u})^3 + (\vec{G}-\vec{u})^2\vec{g}_2 + \right.$$

$$\left. + (\vec{G}-\vec{u})\left(\frac{1}{2}\vec{g}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{g}_2^{\,2}\right) + \frac{1}{4}\vec{g}_1^{\,2}\vec{g}_2 + \frac{1}{4}\vec{g}_2^{\,3}\right)_{\alpha\beta\beta} -$$

$$- \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)} 2^{\frac{1}{2}}}{2(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left((2\beta+\gamma)(\vec{G}-\vec{u}) - \frac{\gamma}{2}\vec{g}_2\right)_\alpha + \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)} 2^{\frac{3}{2}}}{10(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \left((2\beta+\gamma)(\vec{G}-\vec{u})^3 - \frac{\gamma}{2}(\vec{G}-\vec{u})^2\vec{g}_2 + (\vec{G}-\vec{u})\left(\frac{1}{2}\vec{g}^{\,2}\beta + \frac{1}{4}\gamma\vec{g}_2^{\,2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}\gamma\vec{g}_2^{\,3}\right)_{\alpha\beta\beta} + b_\alpha^{(1,1)} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left((\vec{G}-\vec{u})\left(\beta(\eta_j' + \bar{\eta}_k') + \gamma\eta_i - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\theta}(2\beta+\gamma)\right) + \frac{1}{2}\beta\vec{g}'(\eta_j' - \bar{\eta}_k') - \frac{1}{2}\gamma\eta_i\vec{g}_2 + \frac{\bar{\varepsilon}}{k\theta}\frac{\gamma}{2}\vec{g}_2\right)_\alpha \Big] d\bar{x} =$$

(A 124)

$$= \frac{4}{3} 2^{\frac{1}{2}} n_2 (R_1\vartheta)^{\frac{5}{2}} \left[a_\nu^{(1)} 2\gamma(3T_1 + 2T_5) + b_\nu^{(1)} 2^{\frac{1}{2}}\left(\gamma(3T_1 - 2T_5) + \right.\right.$$

$$\left. + 6\beta T_1\right) + \bar{a}_\nu^{(3)} \gamma\left(-\frac{9}{4}T_1 + T_4 - T_5 + \frac{6}{5}T_7 + T_8 + \frac{2}{5}T_9\right) +$$

$$+ \bar{b}_\nu^{(3)} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\left(\beta\left(-\frac{3}{2}T_1 + T_6\right) + \gamma\left(-\frac{3}{4}T_1 + T_5 - \frac{1}{5}T_9\right)\right) +$$

$$+ b_\nu^{(1,1)} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\left(\beta(3T_2 + 2T_{10}) + \gamma(3T_3 - 2T_{11}) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\bar{\varepsilon}}{k\theta}(\beta 6T_1 + \gamma(3T_1 - 2T_5))\right)\right]$$

$$\underline{I}\left((\vec{\xi}_1-\vec{u})^2_{\nu\mu}+(\vec{\xi}_2-\vec{u})^2_{\mu}-2(\vec{\xi}_2-\vec{u})^{\frac{1}{2}}_{\nu\mu}\right) =$$

$$= \frac{n_2\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3}\sum_{ijk}\int F_{n12}^{22'}\, e^{-\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{R_1\vartheta}}\, g'\left[\frac{1}{4}\vec{g}_1^{\,2}+\frac{1}{2}\vec{g}_2^{\,2}-\frac{1}{2}\vec{g}^{\,12}\right]_{\nu\mu}\cdot$$

$$\cdot\left[\overline{\beta_{ik}}+\overline{\gamma_i}+\frac{a^{(3)}_{\mu\beta}}{2R_1\vartheta}\gamma\left(\frac{1}{2}\vec{g}_1^{\,2}+\frac{1}{2}\vec{g}^{\,2}\right)_{\nu\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{b^{(2)}_{\mu\beta}}{2R_1\vartheta}2\left(\frac{1}{2}\beta\vec{g}^{\,2}+\frac{\gamma}{2}\vec{g}_2^{\,2}\right)_{\nu\beta}\right]d\vec{x} = \qquad \text{(A 125)}$$

$$= \frac{32}{3}\,2^{\frac{1}{2}}\,n_2\,(R_1\vartheta)^3\left[\delta_{\nu\mu}\frac{1}{2}\left((\beta+\gamma)(T_4+T_5-T_6)+\right.\right.$$

$$+\Delta\overline{\theta}\left(\beta(T_{12}+T_{13}-T_{14})+\gamma(T_{20}+T_{21}-T_{22})\right)+$$

$$+\frac{a^{(2)}_{\nu\mu}}{5}\gamma(2T_{15}+3T_7-2T_{16}+T_9-\tfrac{1}{2}T_{18})+$$

$$\left.+\frac{b^{(2)}_{\nu\mu}}{5}\left(\beta(2T_{16}+T_{18}-2T_{19})+\gamma(T_7+T_9-\tfrac{1}{2}T_{18})\right)\right]$$

$$\underline{I}\left((\vec{\xi}_1-\vec{u})^2_{\nu\mu}\right)=\frac{n_2\,2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3}\sum_{ijk}\int F_{n12}^{22'}\,e^{-2\frac{(\vec{G}-\vec{u})^2}{R_1\vartheta}}\,g'\cdot$$

$$\cdot\left[(\vec{G}-\vec{u})^2+(\vec{G}-\vec{u})\tfrac{1}{2}\vec{g}_2+\tfrac{1}{4}\vec{g}_1^{\,2}+\tfrac{1}{4}\vec{g}_2^{\,2}\right]_{\nu\mu}\cdot$$

$$\cdot\left[\overline{\beta_{ik}}+\overline{\gamma_i}+\frac{a^{(2)}_{\mu\beta}\gamma}{2R_1\vartheta}\left(2(\vec{G}-\vec{u})^2+\vec{g}_2(\vec{G}-\vec{u})+\tfrac{1}{2}\vec{g}_1^{\,2}+\tfrac{1}{2}\vec{g}_2^{\,2}\right)_{\nu\beta}+\right.$$

$$+\frac{2\,b^{(2)}_{\mu\beta}}{2R_1\vartheta}\left((2\beta+\gamma)(\vec{G}-\vec{u})^2-\frac{\gamma}{2}(\vec{G}-\vec{u})\vec{g}_2+\tfrac{1}{2}\beta\vec{g}^{\,12}+\right.$$

$$\left.\left.+\tfrac{1}{4}\gamma\vec{g}_2^{\,2}\right)_{\nu\beta}\right]d\vec{x} = \qquad \text{(A 126)}$$

$$= n_2(R_1\vartheta)^3\cdot\frac{32}{3}\,2^{\frac{1}{2}}\left[\delta_{\nu\mu}\frac{1}{2}\left((\beta+\gamma)(\tfrac{3}{4}T_1+T_4+\tfrac{1}{2}T_5)+\right.\right.$$

$$\left.+\Delta\overline{\theta}\beta(\tfrac{3}{4}T_2+T_{12}+\tfrac{1}{2}T_{13})+\gamma(\tfrac{3}{4}T_3+T_{20}+\tfrac{1}{2}T_{21})\right)+$$

$$+\frac{a^{(2)}_{\nu\mu}\gamma}{5}\left(\tfrac{25}{8}T_1+\tfrac{5}{2}T_5+2T_{15}+2T_7+\tfrac{1}{2}T_9\right)+\frac{b^{(2)}_{\mu\nu}}{5}\left(\beta(\tfrac{13}{4}T_1+\right.$$

$$\left.2T_{16}+\tfrac{1}{2}T_{18})+\gamma(\tfrac{15}{8}T_1-\tfrac{5}{2}T_5+T_7+\tfrac{1}{2}T_9)\right)\Big]$$

$$I\left[(\vec{G}_1-\vec{u})^3_{\nu\mu\mu}+(\vec{G}_2-\vec{u})^3_{\nu\mu\mu}-2(\vec{G}'-\vec{u})^3_{\nu\mu\mu}\right]=$$

$$=\frac{n_2\,2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3}\sum_{ijk}\int F^{22'}_{112}\,e^{-\frac{(G-u)^2}{R_1\vartheta}}\,g'\cdot\Big[\frac{1}{8}\vec{g}_1^{\,2}\vec{g}_2+$$

$$(\vec{G}-\vec{u})\left(\frac{1}{4}\vec{g}_1^{\,2}+\frac{1}{2}\vec{g}_2^{\,2}-\frac{1}{2}\vec{g}^{\,12}\right)\Big]_{\nu\mu\mu}\cdot\Big[\frac{a_\alpha^{(1)}\beta}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(2(\vec{G}-\vec{u})+\vec{g}_2\right)_\alpha+$$

$$+\frac{b_\alpha^{(1)}2^{\frac{1}{2}}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left((2\beta+\gamma)(\vec{G}-\vec{u})-\frac{\gamma}{2}\vec{g}_2\right)_\alpha-\frac{\bar{a}_\alpha^{(3)}\beta}{2(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(2(\vec{G}-\vec{u})+\vec{g}_2\right)_\alpha+$$

$$+\frac{\bar{a}_\alpha^{(3)}\beta}{10(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left(2(\vec{G}-\vec{u})^3+(\vec{G}-\vec{u})^2\vec{g}_2+(\vec{G}-\vec{u})\left(\frac{1}{2}\vec{g}_2^{\,2}+\frac{1}{2}\vec{g}_1^{\,2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\vec{g}_1^{\,2}\vec{g}_2+\frac{1}{4}\vec{g}_2^{\,3}\right)_{\alpha\beta\beta}-\frac{\bar{b}_\alpha^{(3)}2^{\frac{1}{2}}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left((2\beta+\gamma)(\vec{G}-\vec{u})-\frac{\gamma}{2}\vec{g}_2\right)_\alpha+$$

$$+\frac{\bar{b}_\alpha^{(3)}2^{\frac{3}{2}}}{10(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left((2\beta+\gamma)(\vec{G}-\vec{u})^3-\frac{\gamma}{2}(\vec{G}-\vec{u})^2\vec{g}_2+\right.$$

$$\left.+(\vec{G}-\vec{u})\left(\frac{1}{2}\vec{g}^{\,12}\beta+\frac{1}{4}\gamma\vec{g}_2^{\,2}\right)-\frac{\gamma}{8}\vec{g}_2^{\,3}\right)_{\alpha\beta\beta}+$$

$$+\frac{b^{(11)}2^{\frac{1}{2}}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\left((\vec{G}-\vec{u})\left(\beta(\eta_{ij}'+\eta_{ik}')+\gamma\eta_i-\frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}(2\beta+\gamma)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\beta\vec{g}'(\eta_{ij}'-\eta_{ik}')-\frac{\gamma}{2}\vec{g}_2\eta_i+\gamma\frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\frac{1}{2}\vec{g}_2\right]_\alpha d\vec{u}= \qquad \text{(A 127)}$$

$$=\frac{4}{3}2^{\frac{1}{2}}n_2(R_1\vartheta)^{\frac{3}{2}}\Big[a_\nu^{(1)}10\gamma\left(T_4+T_5-T_6+\frac{6}{5}T_7+T_8\right)+$$

$$+b_\nu^{(1)}2^{\frac{1}{2}}\left(10\beta(T_4+T_5-T_6)+5\gamma(T_4+T_5-T_6-\frac{6}{5}T_7-T_8)\right)+$$

$$+\bar{a}_\nu^{(3)}\cdot\gamma\left(-\frac{35}{8}T_4-\frac{15}{4}T_5+\frac{15}{4}T_6+\frac{11}{5}T_{15}+\frac{6}{5}T_7-\frac{11}{5}T_{16}-\right.$$

$$\left.-\frac{5}{2}T_{22}+\frac{11}{10}T_9-\frac{3}{10}T_{18}-\frac{1}{4}T_{23}+\frac{2}{5}T_{24}+\frac{3}{5}T_{27}\right)+$$

$$+\bar{b}_\nu^{(3)}2^{\frac{1}{2}}\Big(\beta\left(-\frac{15}{4}T_4-\frac{15}{4}T_5+\frac{5}{2}T_6+\frac{11}{5}T_{16}+\frac{5}{2}T_{22}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{5}T_{18}+\frac{1}{2}T_{23}-\frac{11}{5}T_{19}\right)+\gamma\left(-\frac{15}{8}T_4-\frac{15}{8}T_5+\frac{5}{4}T_6+\frac{3}{4}T_7-\frac{11}{16}\right.$$

$$\left.+\frac{5}{2}T_8-\frac{3}{10}T_{18}-\frac{1}{4}T_{23}-\frac{3}{5}T_{27}\right)+b_\nu^{(11)}2^{\frac{1}{2}}\Big(\beta(5T_{12}+5T_{13}-5T_{22}+$$

$$+6T_{25})+\gamma(5T_{20}+5T_{11}-5T_{21}-6T_{26})-\frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\gamma(5T_4+5T_5-$$

$$- 5 T_3 - 3 T_4 - 5 T_8) - \frac{\varepsilon}{k\Theta} \delta (3 (T_4 + T_5 - T_6))).$$

$$I\left((\vec{\xi} - \vec{u})^3_{\alpha\beta\beta}\right) = \frac{n_2 \, 2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi k_1 \vartheta)^3} \sum_{ijk} \int F_{112}^{22} e^{-2\frac{(\xi - u)^2}{R_1 \vartheta}} g' \cdot$$

$$\cdot \left[(\vec{\xi} - \vec{u})^3 + \frac{1}{2} \vec{g}_2 (\vec{\xi} - \vec{u})^2 + (\vec{\xi} - \vec{u})\left(\frac{1}{4}\vec{g}_1^{\,2} + \frac{1}{4}\vec{g}_2^{\,2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{8} \vec{g}_1 \vec{g}_2 + \frac{1}{8} \vec{g}_2^{\,3} \Big]_{\alpha\beta\beta} \cdot \left[\frac{a_\alpha^{(1)} \delta}{(R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left(2 (\vec{\xi} - \vec{u}) - \vec{g}_2 \right)_\alpha + \right.$$

$$+ \frac{b_\alpha^{(1)} 2^{\frac{1}{2}}}{(R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left((2\beta + \delta)(\vec{\xi} - \vec{u}) - \frac{\delta}{2} \vec{g}_2 \right)_\alpha -$$

$$- \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)} \delta}{2 (R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left(2 (\vec{\xi} - \vec{u}) + \vec{g}_2 \right)_\alpha + \frac{\bar{a}_\alpha^{(3)} \delta}{10 (R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \left(2 (\vec{\xi} - \vec{u})^3 + \right.$$

$$+ (\vec{\xi} - \vec{u})^2 \vec{g}_2 + (\vec{\xi} - \vec{u})\left(\frac{1}{2} \vec{g}_1^{\,2} + \frac{1}{2} \vec{g}_2^{\,2}\right) + \frac{1}{4} \vec{g}_1^{\,2} \vec{g}_2 +$$

$$+ \frac{1}{4} \vec{g}_2^{\,3} \Big)_{\alpha\beta\beta} - \frac{\bar{b}_\alpha^{(3)} 2^{\frac{1}{2}}}{2 (R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left((2\beta + \delta)(\vec{\xi} - \vec{u}) - \frac{\delta}{2} \vec{g}_2 \right)_\alpha +$$

$$\frac{\bar{b}_\alpha^{(3)} 2^{\frac{3}{2}}}{10 (R_1 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \left((2\beta + \delta)(\vec{\xi} - \vec{u})^3 - \frac{\delta}{2} \vec{g}_2 (\vec{\xi} - \vec{u})^2 + \right.$$

$$+ (\vec{\xi} - \vec{u})\left(\frac{1}{2}\beta \vec{g}'^{\,2} + \frac{1}{4} \delta \vec{g}_2^{\,2}\right) - \frac{1}{8} \delta \vec{g}_2^{\,3} \Big)_{\alpha\beta\beta} +$$

$$\frac{b_\alpha^{(11)} 2^{\frac{1}{2}}}{(R_1 \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \left((\vec{\xi} - \vec{u}) \left((\eta_j' - \eta_k') \beta + \delta \eta_i - \frac{\varepsilon}{k\Theta} (2\beta + \delta) \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \beta \vec{g}' (\eta_j' - \eta_k') - \frac{1}{2} \delta \eta_i \vec{g}_2 + \frac{\varepsilon}{k\Theta} \delta \vec{g}_2 \Big)_\alpha \Big] dx = \qquad \text{(A 128)}$$

$$= n_2 \, 2^{\frac{1}{2}} \, \frac{4}{3} (R_1 \vartheta)^3 \Big[a_\alpha^{(1)} \delta \left(\frac{15}{2} T_1 + 10 T_5 + 10 T_4 + 12 T_7 + \right.$$

$$\left. + 16 T_8 + 2 T_9 \right) + b_\alpha^{(1)} 2^{\frac{1}{2}} \left(\beta \left(\frac{15}{2} T_1 + 10 T_4 + 5 T_5 \right) + \right.$$

$$\left. + \delta \left(\frac{15}{4} T_1 + 5 T_4 - 6 T_7 - 5 T_8 - T_9 \right) \right) +$$

$$+ \bar{a}_\alpha^{(3)} \delta \left(- \frac{29}{16} T_1 - \frac{25}{8} T_4 - \frac{19}{8} T_5 + \frac{1}{20} T_9 + \frac{11}{5} T_{15} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{5} T_4 + \frac{4}{5} T_{24} + \frac{4}{5} T_{27} + \frac{1}{10} T_{28} \right) + \bar{b}_\alpha^{(3)} 2^{\frac{1}{2}} \left(3 \left(- \frac{9}{8} T_1 + \right. \right.$$

$$+\frac{5}{4}T_6-\frac{15}{4}T_4-\frac{5}{4}T_5+\frac{11}{5}T_{16}+\frac{5}{2}T_{22}+\frac{3}{10}T_{18}+$$
$$+\frac{1}{4}T_{23})+\delta(-\frac{9}{16}T_1-\frac{1}{8}T_5-\frac{15}{8}T_4+\frac{11}{20}T_9+$$
$$+\frac{13}{5}T_7+\frac{5}{2}T_8-\frac{3}{5}T_{27}-\frac{1}{10}T_{28})+$$
$$+b_\nu^{(1,1)}2^{\frac{1}{2}}\Big(\beta(\frac{15}{4}T_2+\frac{5}{2}T_{10}+5T_{12}+\frac{5}{2}T_{13}+6T_{25}+$$
$$+T_{29})+\delta(\frac{15}{4}T_3+5T_{20}-T_{17}-6T_{26})-\frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\Big(\beta(\frac{15}{2}T_1+$$
$$+10T_4+5T_5)+\delta(\frac{15}{4}T_1+5T_4-6T_3-5T_8-T_9)\Big)\Big]$$

$$I(\varepsilon_i-2\varepsilon_j')=\frac{n_2\,2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3}\sum_{ijk}\int F_{112}^{22'}e^{-2\frac{(\bar{c}-\bar{w})^2}{R_1\vartheta}}g'\cdot$$
$$\cdot(\varepsilon_i-\varepsilon_j'-\bar{\varepsilon}_k')(\beta_{jk}+\delta_{ij})\,d\bar{x}= \qquad \text{(A 129)}$$
$$=n_2\cdot 2^{\frac{1}{2}}16\,k\Theta(R_1\vartheta)^2\Big((\beta+\delta)(T_3-T_2)+\Delta\bar{\theta}(\beta T_{30}+\delta T_{31})\Big)$$

$$I(\varepsilon_i(\vec{\xi}_2-\vec{w})_\nu-2\varepsilon_j'(\vec{\xi}_2-\vec{w})_\nu)=$$
$$=\frac{n_2\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{(2\pi R_1\vartheta)^3}\sum_{ijk}\int F_{112}^{22'}e^{-2\frac{(\bar{c}-\bar{w})^2}{R_1\vartheta}}g'\cdot\Big[\Delta\varepsilon(\vec{c}-\vec{w})-\frac{1}{2}\varepsilon_i\vec{g}_2+$$
$$+\frac{1}{2}\vec{g}'(\bar{\varepsilon}_k'-\varepsilon_j')\Big]_\nu\cdot\Big[\frac{a_\mu^{(1)}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\delta_{\mu\lambda}(2(\vec{c}-\vec{w})+\vec{g}_2)_\lambda+$$
$$+\frac{b_\mu^{(1)}2^{\frac{1}{2}}}{(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big((2\beta+\delta)(\vec{c}-\vec{w})-\frac{\delta}{2}\vec{g}_2\Big)-\frac{\bar{a}_\mu^{(3)}\delta}{2(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big(2(\vec{c}-\vec{w})+\vec{g}_2\Big)_\mu+$$
$$+\frac{\bar{a}_\mu^{(3)}\delta}{10(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big(2(\vec{c}-\vec{w})^3+(\vec{c}-\vec{w})^2\vec{g}_1+(\vec{c}-\vec{w})(\frac{1}{2}\vec{g}_1^2+\frac{1}{2}\vec{g}_2^2)+$$
$$+\frac{1}{4}\vec{g}_1^2\vec{g}_2+\frac{1}{4}\vec{g}_2^3\Big)_{\alpha\beta\beta}-\frac{\bar{b}_\mu^{(3)}2^{\frac{1}{2}}}{2(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big((2\beta+\delta)(\vec{c}-\vec{w})-\frac{\delta}{2}\vec{g}_2\Big)_\mu+$$
$$+\frac{\bar{b}_\mu^{(3)}\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{10(R_1\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big((2\beta+\delta)(\vec{c}-\vec{w})^3-\frac{\delta}{2}\vec{g}_2(\vec{c}-\vec{w})^2+$$
$$+(\vec{c}-\vec{w})(\frac{1}{2}\beta\vec{g}^{\,2}+\frac{1}{4}\delta\vec{g}_2^{\,2})-\frac{1}{8}\delta\vec{g}_2^{\,3}\Big)_{\alpha\beta\beta}+$$

$$+\frac{b_\alpha^{(1,1)}\,2^{\frac{1}{2}}}{(R,\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\Big(\Big(\vec{\xi}-\vec{x}\Big)\Big(\beta\,\eta_3'+\bar{\eta}_k'\Big)+\delta\,\eta_k-\frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\,\vec{q}\,(\beta+\delta)\Big)_\alpha$$

$$+\frac{1}{2}\,\vec{q}^{\,2}\beta\,(\eta_3'-\bar{\eta}_k')-\frac{\delta}{2}\,\eta_k\,\vec{q}_2+\frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\,\frac{\delta}{2}\,\vec{q}_2\Big)_\alpha\Big]\,d\vec{x}=$$

(A 130)

$$=n_2\,\frac{4}{3}\,2^{\frac{1}{2}}\,k\Theta\,(R,\vartheta)^{\frac{3}{2}}\Big[a_\alpha^{(1)}\,2\delta\,(3\bar{T}_3-3\bar{T}_2-2\bar{T}_{11}-2\bar{T}_{10})+$$

$$+b_\alpha^{(1)}\,2^{\frac{1}{2}}\,(6\beta\,(\bar{T}_3-\bar{T}_2)+\delta\,(3\bar{T}_3-3\bar{T}_2+2\bar{T}_{11}+2\bar{T}_{10}))+$$

$$+\bar{a}_\alpha^{(3)}\,\delta\,(-\tfrac{9}{4}\,\bar{T}_3+\tfrac{9}{4}\,\bar{T}_2+\bar{T}_{20}-\bar{T}_{12}+2\bar{T}_{11}-\tfrac{1}{2}\,\bar{T}_{13}+$$

$$+\tfrac{3}{2}\,\bar{T}_{10}-\tfrac{6}{5}\,\bar{T}_{26}-\tfrac{6}{5}\,\bar{T}_{25}-\tfrac{1}{5}\,\bar{T}_{17}-\tfrac{1}{5}\,\bar{T}_{29})+$$

$$+\bar{b}_\alpha^{(3)}\,2^{\frac{1}{2}}\,(\beta\,(-\tfrac{3}{2}\,\bar{T}_3+\tfrac{3}{2}\,\bar{T}_2+\bar{T}_{27}-\bar{T}_{14})+\delta\,(-\tfrac{3}{4}\,\bar{T}_3+$$

$$+\tfrac{1}{2}\,\bar{T}_2-\tfrac{1}{2}\,\bar{T}_{13}-\tfrac{1}{2}\,\bar{T}_{10}+\tfrac{1}{5}\,\bar{T}_{17}+\tfrac{1}{5}\,\bar{T}_{29})+$$

$$+b_\alpha^{(3,1)}\,2^{\frac{1}{2}}\,(\beta\,(3\bar{T}_{30}-2\bar{T}_{32}-2\bar{T}_{33})+\delta\,(3\bar{T}_{31}+2\bar{T}_{34}+2\bar{T}_{32})-$$

$$-\frac{\bar{\varepsilon}}{k\Theta}\,(6\beta\,(\bar{T}_3-\bar{T}_2)+\delta\,(3\bar{T}_3-3\bar{T}_2+2\bar{T}_{11}+2\bar{T}_{10}))\Big)\Big]$$

Auch hier sind die 34 Integrale $\bar{T}_\nu$ nicht vollkommen unabhängig. Mit Hilfe des Energiesatzes (A 105) bekommt man Beziehungen zwischen einigen der $\bar{T}_\nu$. Sie werden hier nicht angegeben.

e) Zusammenfassung

Bisher wurde nur teilweise von der Näherung $\Delta\vartheta$ und $\Delta\theta$ klein gegen eins Gebrauch gemacht. Diese Näherung wird jetzt nachträglich für alle Integrale durchgeführt.
Es gilt:

$$\vartheta^\nu \approx T^\nu(1+\nu\Delta\vartheta) \qquad \theta^\mu \approx T^\mu(1+\mu\Delta\theta)$$

$$F_{11}(\vartheta) \approx \bar{F}_{11}(T)(1+\bar{w}^2\Delta\vartheta)$$

$$F_{22}(\vartheta,\theta) \approx \bar{F}_{22}(T)(1+\bar{w}^2\Delta\vartheta+(\bar{\eta}_i+\bar{\eta}_j-\frac{2\bar{\varepsilon}(T)}{kT})\Delta\theta)$$

$$F_{12}(\vartheta,\theta) \approx \bar{F}_{12}(T)(1+\bar{w}^2\Delta\vartheta+(\bar{\eta}_i-\frac{\bar{\varepsilon}}{kT})\Delta\theta)$$

$$F_{11}^{12'}(\vartheta,\theta) \approx \bar{F}_{11}^{12'}(T)(1+(\bar{w}'^2+\bar{\eta}_j')\Delta\vartheta)$$

$$F_{12}^{22'}(\vartheta,\theta) \approx \bar{F}_{12}^{22'}(T)(1+(\bar{w}'^2+\bar{\eta}_j'+\bar{\eta}_k')\Delta\vartheta-\frac{\bar{\varepsilon}(T)}{kT}\Delta\theta)$$

$$\frac{1}{Z(\theta)} \approx \frac{1}{Z(T)}(1-\frac{\bar{\varepsilon}(T)}{kT}\Delta\theta) \qquad \overline{\Delta\theta} = \Delta\theta-\Delta\vartheta$$

$$\beta(\theta) \approx \bar{\beta}(T)(1-\frac{\bar{\varepsilon}(T)}{kT}\Delta\theta)$$

$$\delta(\vartheta) \approx \delta(T)(1-(\tfrac{3}{2}+\frac{E_2}{kT})\Delta\vartheta)$$

Terme mit $\Delta\vartheta$ und $\Delta\theta$ werden ebenfalls vernachlässigt, wenn sie mit Koeffizienten $a^{(\nu)}$ bzw. $b^{(\nu)}$ multipliziert werden. Die Koeffizienten

A_1, a_1, a_2, $\mathfrak{D}_1$, d_1, d_2, aus § V werden

unten explizit angegeben, da sie nicht unmittelbar aus

Anhang a) bis d) ablesbar sind. Dabei deutet ein Querstrich über einer Funktion an, daß die Variablen ϑ und $\mathcal{J}$ darin durch T ersetzt wurden. Die Koeffizienten C_1, c_1, c_2 treten in den hydrodynamischen Gleichungen nie auf, deshalb wird darauf verzichtet, sie hier anzuführen. Die restlichen Koeffizienten kann man leicht aus den Ergebnissen von Anhang a) bis d) ablesen, wenn man die Gleichungen (113) (116) (117) (119) aus § V benutzt und in den Integralen Q_ν, P_ν, R_ν, S_ν, T_ν aus Anhang a) bis d) ϑ und $\mathcal{J}$ durch T ersetzt.

$$A_1(T,\alpha,\beta) = 4(RT)^2(\bar\beta+\bar\gamma)\left[9n_1\bar S_7 + 2\tfrac{1}{2}\,8n_2\bar T_1\right]$$

$$a_1(T,\alpha,\beta) = \frac{4(RT)^2}{A_1}\Big[9n_1\big((\bar\beta+\bar\gamma)(-\tfrac{3}{2}\bar S_1 + \bar S_4 + \bar S_2) -$$

$$- \bar\gamma\big(\tfrac{3}{2} + \tfrac{E_0}{kT}\big)\bar S_1 - \bar S_3 + 2\tfrac{1}{2}\,8n_1\big((\bar\beta+\bar\gamma)(-\tfrac{3}{2}\bar T_1 +$$

$$+ \bar T_2 + \bar T_6) - \bar\gamma\big(\tfrac{3}{2} + \tfrac{E_0}{kT}\big)\bar T_1 - \bar\gamma\bar T_3 - \bar\beta\bar T_2\big)\Big]$$

$$a_2(T,\alpha,\beta) = \frac{4(RT)^2}{A_1}\Big[9n_1\bar\beta\big(\bar S_2 - \tfrac{5}{kT}\bar S_1\big) +$$

$$+ 2\tfrac{1}{2}\,8n_2\big(\bar\beta\bar T_2 + \bar\gamma\bar T_3 - \tfrac{5}{kT}(\bar\beta+\bar\gamma)\bar T_1\big)\Big]$$

$$D_1(T,\alpha,\beta) = (RT)^{\frac{3}{2}}\Big[2^{\frac{1}{2}}\tfrac{16}{3}n_2^2\bar Q_1 + \big(\tfrac{2}{3}\big)^{\frac{1}{2}}8n_1n_2\bar Q_4 +$$

$$+ 12n_1(RT)^{\frac{3}{2}}(\bar\beta+\bar\gamma)(2\bar S_5 - \bar S_4) + 2^{\frac{1}{2}}\tfrac{16}{3}n_2(RT)^{\frac{3}{2}}(\bar\beta+\bar\gamma)\cdot$$

$$\cdot(\bar T_4 + \bar T_5 - \bar T_6)\Big]$$

$$d_1(T,\alpha,\beta) = \frac{(RT)^{\frac{3}{2}}}{D_1}\Big[2^{\frac{1}{2}}8n_2^2\big(-\bar Q_4 + \tfrac{2}{3}\bar Q_5\big) +$$

$$+ \big(\tfrac{2}{3}\big)^{\frac{1}{2}}8n_1n_2\big(-\tfrac{3}{2}\bar Q_4 + \bar Q_6\big) + 12n_1(RT)^{\frac{3}{2}}\Big((\bar\beta+\bar\gamma)(-3\bar S_5 +$$

$$+ \tfrac{3}{2}\bar S_4 + 2\bar S_8 + 3\bar S_{13} - \bar S_{11} + 2\bar S_6 - \bar S_7) - \bar\gamma\big(\tfrac{3}{2} + \tfrac{E_0}{kT}\big)\cdot$$

$$\cdot\left(2\bar{S}_5 - \bar{S}_4\right) - \beta\left(2\bar{S}_6 - \bar{S}_7\right)\Big) + 2^{\frac{1}{2}}\,\frac{16}{3}\,n_2 (RT)^{\frac{3}{2}} \cdot$$

$$\cdot\Big[(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\left(-\tfrac{3}{2}\bar{T}_4 - \tfrac{3}{2}\bar{T}_5 + \tfrac{3}{2}\bar{T}_6 + \bar{T}_{16} + \tfrac{3}{2}\bar{T}_{22} + \tfrac{1}{4}\bar{T}_{18} +$$

$$+\tfrac{3}{8}\bar{T}_{23} - \bar{T}_{19} + \bar{T}_{12} + \bar{T}_{13} - \bar{T}_{14}\right) - \beta\left(\bar{T}_{12} + \bar{T}_{13} - \bar{T}_{14}\right) -$$

$$-\delta\left(\bar{T}_{20} + \bar{T}_{21} - \bar{T}_{27} + \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{E_0}{kT}\right)\left(\bar{T}_4 + \bar{T}_5 - \bar{T}_6\right)\right)\Big)\Big]$$

$$\alpha_2(T,\alpha,\beta) = \frac{(R_1 T)^{\frac{3}{2}}}{D_1}\Big[2^{\frac{1}{2}}\,\frac{16}{3}\,n_2^2\,\bar{Q}_3 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\delta n_1 n_2\,\bar{Q}_9 +$$

$$+12\,n_1 (RT)^{\frac{3}{2}}\beta\left(2\bar{S}_6 - \bar{S}_7 - \frac{\bar{E}}{kT}\left(2\bar{S}_5 - \bar{S}_4\right)\right) +$$

$$+2^{\frac{1}{2}}\,\frac{16}{3}\,n_2 (RT)^{\frac{3}{2}}\Big(2\beta\,\frac{\bar{E}}{kT}\left(-\bar{T}_4 - \bar{T}_5 + \bar{T}_6\right) +$$

$$+\beta\left(\bar{T}_{13} + \bar{T}_{12} - \bar{T}_{14}\right) + \delta\left(\bar{T}_{20} + \bar{T}_{21} - \bar{T}_{27}\right)\Big)\Big]$$

Literaturverzeichnis

(1)	CHAPMAN, S. COWLING, T.G.	The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge 1953
(2)	GRAD, H.	Comm. on Pure and Applied Maths., 2 , (1949), S. 331
(3)	WANG CHANG, C.S. UHLENBECK, G.E.	Eng. Res. Inst., Univ. Michigan, Report CM-681 , July 1951
(4)	HEIL, M.	Dissertation, Freie Universität Berlin, 1960
(5)	LUDWIG, G. HEIL, M.	Advances in Applied Mechanics, Volume VI, 1960, Acad. Press New York
(6)	KOLODNER, I.I.	Inst. Math. Sciences, New York Univ., Report NYC-7980, September 1957
(7)	Final Technical Report, Part II	U.S. Department of Army, Contract DA-91-591-EUC-1592 1960/61
(8)	PETZOLD, J.	Z. Phys. Chemie (Neue Folge), 12 ,(1957)
(9)	GROßMANN, S.	Dissertation, Freie Universität Berlin, 1959
(10)	BYRON, S.	J. of Chemical Physics, Vol. 30,(1959) und Bericht Interfeometric Measurement in a Shock Tube of Dissociation Rates for Air and its Component Gases. Cornell University, Ithaca, New York
(11)	GILMORE, F.R.	Rand Corporation, RM-1543, Astia AD-84052 . (1955)
(12)	HANSEN, C.F.	NACA, Technical Note 4150 , (1958)
(13)	GRAD, H.	Comm. on Pure and Applied Maths., 2 , (1949), S. 325
(14)	HIRSCHFELDER, CURTISS, BIRD	Molecular Theory of Gases and Liquids, New York, 1954
(15)	WALDMANN, L. TRÜBENBACHER, E.	Z. f. Naturforschung 17a (1962) S. 363

L e b e n s l a u f

Am 21. November 1934 wurde ich als Tochter des Diplom-Ingenieurs Walter SCHILO und seiner Ehefrau Helene, geb. Diederichs, in Berlin-Siemensstadt geboren. Meine Eltern zogen 1937 nach Schönwalde bei Falkensee und hier wurde ich 1941 eingeschult. Von 1942 - 1945 besuchte ich die Volksschule in Parchim (Mecklenburg), wohin meine Mutter mit uns Kindern wegen der Kriegsereignisse übersiedelte. Nach dem Tode meiner Mutter kehrten wir Kinder Ende 1945 zu meinem Vater nach Schönwalde zurück. Dort besuchte ich von 1946 - 1947 die 5. und 7. Klasse der Einheitsschule Schönwalde. 1947 - 1948 war ich Schülerin der 8. Klasse der Lily-Braun-Schule in Berlin-Spandau. Nach einem einjährigen Aufenthalt in Schweden besuchte ich diese Schule bis zur Reifeprüfung im Frühjahr 1953.

Anschließend wurde ich für das Sommersemester 1953 an der Freien Universität Berlin immatrikuliert. Dort legte ich im Juni 1956 die Vordiplomprüfung ab und bestand im Juni 1959 meine Diplomprüfung. Meine Diplomarbeit war eine experimentelle "Untersuchung einiger Eigenschaften von Photomultipliern" , die ich am I. Physikalischen Institut der Freien Universität durchführte.

Ab Juni 1959 arbeitete ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der F.U. an Forschungsaufträgen über Grenzschichtströmungen und Stoßwellen im Hyperschallgebiet. Im Rahmen dieser Arbeiten führte ich auch die vorliegende Arbeit aus, die auf eine Anregung von Professor Ludwig zur Untersuchung dissoziierender Gase zurückgeht.